91 (E) : $y' - 5y = 0$ équivaut à $y' = 5y$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay$ avec $a = 5$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a réel donné) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{5x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

a. Faux. Puisqu'il existe un réel x tel que $\mathrm{e}^{-5x} \neq \mathrm{e}^{5x}$, on en déduit que la fonction $x \longmapsto -2\mathrm{e}^{-5x}$ n'est pas solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

b. Vrai. En prenant $C = 2$, la fonction $x \longmapsto 2\mathrm{e}^{5x}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

c. Vrai. Pour tout réel x, $f(x) = 2\mathrm{e}^{-5(1-x)} = 2\mathrm{e}^{-5+5x} = 2\mathrm{e}^{-5} \times \mathrm{e}^{5x}$.
Donc en prenant $C = 2\mathrm{e}^{-5}$, la fonction $f : x \longmapsto 2\mathrm{e}^{-5(1-x)}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
De plus, $f(1) = 2\mathrm{e}^{-5(1-1)} = 2\mathrm{e}^{0} = 2 \times 1 = 2$.
Donc la fonction $f : x \longmapsto 2\mathrm{e}^{-5(1-x)}$ est la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 2$.

d. Faux. En prenant $C = \frac{1}{5}$, la fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
De plus, on sait que k étant un nombre réel donné, la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{kx}$ est la fonction $x \longmapsto k\mathrm{e}^{kx}$.
Donc, pour tout réel x, $g'(x) = \frac{1}{5} \times 5\mathrm{e}^{5x} = \mathrm{e}^{5x}$.
Par conséquent, on a $g'(0) = \mathrm{e}^{5\times 0} = \mathrm{e}^{0} = 1$ donc $g'(0) \neq \frac{1}{5}$.