Chapitre 11
Équations différentielles

Revoir des points essentiels

104 **a.** $y' = 8y$. On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay$, avec $a = 8$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a réel donné) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{8x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

b. $y' = -6y$. On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme :
$y' = ay$, avec $a = -6$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a réel donné) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-6x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

c. $y' + 10y = 0$ équivaut à $y' = -10y$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay$, avec $a = -10$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a réel donné) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-10x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

d. $y' - 5y = 0$ équivaut à $y' = 5y$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay$, avec $a = 5$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a réel donné) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{5x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

e. $y' + \frac{1}{3}y = 0$ équivaut à $y' = -\frac{1}{3}y$. On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay$, avec $a = -\frac{1}{3}$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a réel donné) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

f. $2y' - 0{,}2y = 0$ équivaut à $2y' = 0{,}2y$, ce qui est équivalent à $y' = 0{,}1y$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay$, avec $a = 0{,}1$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a réel donné) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{0{,}1x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

g. $0{,}1y' = 10y$ équivaut à $y' = 100y$. On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay$, avec $a = 100$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a réel donné) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{100x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

h. $-y' + 0{,}5y = 0$ équivaut à $-y' = -0{,}5y$, ce qui est équivalent à $y' = 0{,}5y$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay$, avec $a = 0{,}5$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a réel donné) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{0{,}5x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

i. $y' = 7y$. On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay$, avec $a = 7$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a réel donné) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{7x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

j. $-3y' - 8y = 0$ équivaut à $-3y' = 8y$, ce qui est équivalent à $y' = -\frac{8}{3}y$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay$, avec $a = -\frac{8}{3}$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a réel donné) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{-\frac{8}{3}x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

k. $y' - \ln(5)\,y = 0$ équivaut à $y' = \ln(5)\,y$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay$, avec $a = \ln(5)$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a réel donné) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{\ln(5)x} = C5^x$, où $C \in \mathbb{R}$.

l. $y = -0{,}5y'$ équivaut à $y' = -2y$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay$, avec $a = -2$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a réel donné) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-2x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

105 **a.** $y' + 2y = 7$ équivaut à $y' = -2y + 7$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay + b$, avec $a = -2$ et $b = 7$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec a et b deux réels donnés, a non nul) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} - \frac{7}{-2} = C\mathrm{e}^{-2x} + 3{,}5$, où $C \in \mathbb{R}$.

b. $y' = -y + 9$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay + b$, avec $a = -1$ et $b = 9$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec a et b deux réels donnés, a non nul) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-1x} - \frac{9}{-1} = Ce^{-x} + 9$, où $C \in \mathbb{R}$.

c. $y' + 6y = 12$ équivaut à $y' = -6y + 12$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay + b$, avec $a = -6$ et $b = 12$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec a et b deux réels donnés, a non nul) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{-6x} - \frac{12}{-6} = Ce^{-6x} + 2$, où $C \in \mathbb{R}$.

d. $y' = 10 - 5y$ équivaut à $y' = -5y + 10$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay + b$, avec $a = -5$ et $b = 10$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec a et b deux réels donnés, a non nul) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{-5x} - \frac{10}{-5} = Ce^{-5x} + 2$, où $C \in \mathbb{R}$.

e. $y' = 100y - 100$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay + b$, avec $a = 100$ et $b = -100$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec a et b deux réels donnés, a non nul) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{100x} - \frac{-100}{100} = Ce^{100x} + 1$, où $C \in \mathbb{R}$.

f. $10y' - 0{,}2y = 1$ équivaut à $10y' = 0{,}2y + 1$, ce qui équivalent à $y' = 0{,}02y + 0{,}1$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay + b$, avec $a = 0{,}02$ et $b = 0{,}1$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec a et b deux réels donnés, a non nul) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{0{,}02x} - \frac{0{,}1}{0{,}02} = Ce^{0{,}02x} - 5$, où $C \in \mathbb{R}$.

g. $5y' + 10y = 10$ équivaut à $5y' = -10y + 10$, ce qui est équivalent à $y' = -2y + 2$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay + b$, avec $a = -2$ et $b = 2$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec a et b deux réels donnés, a non nul) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle quelconque.

Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} - \frac{2}{-2} = C\mathrm{e}^{-2x} + 1$, où $C \in \mathbb{R}$.

h. $y' = \frac{y}{2} - 5$ équivaut à $y' = 0{,}5y - 5$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay + b$, avec $a = 0{,}5$ et $b = -5$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec a et b deux réels donnés, a non nul) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{0{,}5x} - \frac{-5}{0{,}5} = C\mathrm{e}^{0{,}5x} + 10$, où $C \in \mathbb{R}$.

i. $15y = 5y' + 20$ équivaut à $5y' = 15y - 20$, ce qui est équivalent à $y' = 3y - 4$.
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay + b$, avec $a = 3$ et $b = -4$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec a et b deux réels donnés, a non nul) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle quelconque.
Donc les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{3x} - \frac{-4}{3} = C\mathrm{e}^{3x} + \frac{4}{3}$, où $C \in \mathbb{R}$.