Sujet D

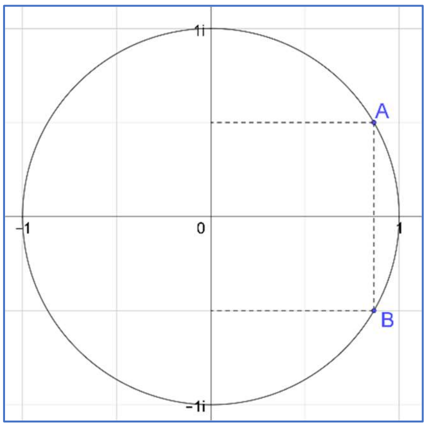
1. a. D'une part, $z_A = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ donc $|z_A| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1.$

De plus, une valeur de θ telle que $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$ est $\frac{\pi}{6}$. Donc un argument de z_A est $\frac{\pi}{6}$.

D'autre part, $z_B = \overline{z_A}$ donc $|z_B| = |z_A| = 1$ et un argument de z_B est $-\frac{\pi}{6}$.

b. On en déduit par définition que $z_A = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c.

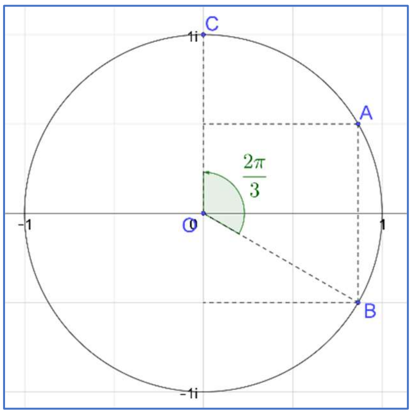


2. a. La transformation r est de la forme $z \mapsto az$, avec a non réel, $|a| = 1$ et, plus précisément, $a = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. D'après le cours, la transformation est donc la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b. Par hypothèse, l'affixe z_C de C est égale à $r(z_B)$.

$z_C = r(z_B) = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3} - i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{4\pi}{6} - i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$

c.

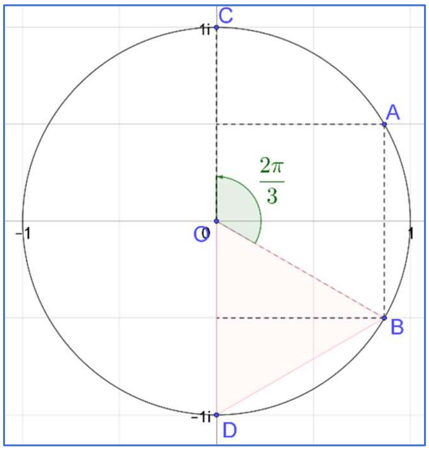


3. a. Le vecteur $\overrightarrow{AO}$ a pour affixe $0 - z_A = -\frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

b. Par hypothèse, l'affixe z_D de D est égale à $t(z_B)$.

$$z_D = t(z_B) = \frac{\sqrt{3}-i}{2} - \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}-i-(\sqrt{3}+i)}{2} = \frac{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

c.



4. a. On calcule $e^{-i\frac{\pi}{3}}z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{2\pi+\pi}{6}} = e^{-i\frac{3\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$. Donc $e^{-i\frac{\pi}{3}}z_B = z_D$.

b. D'après la question précédente et par définition, z_D est l'image de z_B par la transformation $z \mapsto e^{-i\frac{\pi}{3}}z$, qui est l'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
Par définition d'une rotation, on a : OB = OD et l'angle formé par $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$ a pour mesure $-\frac{\pi}{3}$. Donc le triangle OBD est équilatéral.

5. Puisque OBD est un triangle équilatéral, BD = OD = 1.
De plus, DC $= |z_C - z_D| = |i - (-i)| = |2i| = 2$ et

$$BC = |z_C - z_B| = \left|i - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right| = \left|\frac{2i-\sqrt{3}+i}{2}\right| = \left|\frac{-\sqrt{3}+3i}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}}$$
$$= \sqrt{3}.$$

Donc $BD^2 + BC^2 = 1 + 3 = 4 = DC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BCD est rectangle en B.
Remarque : on peut aussi raisonner avec les angles en calculant la somme des angles géométriques $\widehat{DBO}$ et $\widehat{OBC}$.