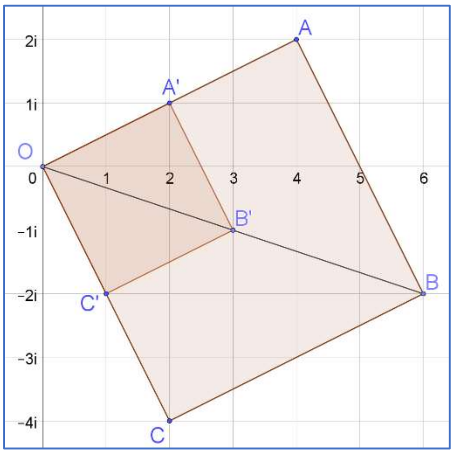
135 **1. a.** $z_A = 4 + 2i$; $z_B = 6 - 2i$; $z_C = 2 - 4i$

b. On remarque que $0 + 4 + 2i = 4 + 2i$ et que $2 - 4i + 4 + 2i = 6 - 2i$, c'est-à-dire $z_O + 4 + 2i = z_A$ et $z_C + 4 + 2i = z_B$. Donc les affixes de A et de B sont les images respectives de O et de C par la fonction $z \mapsto z + 4 + 2i$. Autrement dit, A et B sont les images respectives de O et de C par la translation de vecteur $\vec{u}$, dont l'affixe est $4 + 2i$.

c. $|z_A|^2 + |z_C|^2 = 4^2 + 2^2 + 2^2 + (-4)^2 = 40$
$|z_C - z_A|^2 = |2 - 4i - (4 + 2i)|^2 = |-2 - 6i|^2 = (-2)^2 + (-6)^2 = 40$.
Donc $|z_A|^2 + |z_C|^2 = |z_C - z_A|^2$. Donc $OA^2 + OC^2 = AC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAC est rectangle en O.

d. D'une part, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont égaux d'après la question **1.b.**. Donc OABC est un parallélogramme.
D'après la question **1.c.**, OABC possède un angle droit. Donc c'est un rectangle.
Enfin, on remarque que $OA = |z_A - z_O| = \sqrt{20}$ et que $OC = |z_C - z_O| = \sqrt{20}$.
Donc OABC possède deux côtés consécutifs de même longueur. Donc c'est un carré.



2. a. B' a pour affixe $\frac{1}{2} \times (6 - 2i)$, c'est-à-dire $3 - i$.

b. La fonction $z \mapsto \frac{1}{2}z$ est associée à l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$. Par propriété, O, B et son image B' sont donc alignés.

c. Par propriété, l'image d'un carré par homothétie est encore un carré. Donc OA'B'C' est un carré.