Chapitre 12
Nombres complexes

Revoir des points essentiels

142 1. $|z| = |-1 - \mathrm{i}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

En notant θ un argument de z, on obtient $cos\ \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $sin\ \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc un argument de z est égal à $-\frac{3\pi}{4}$.

Donc $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

2. $|z| = |3\mathrm{i} + 3| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

En notant θ un argument de z, on obtient $\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc un argument de z est égal à $\frac{\pi}{4}$.

Donc $z = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

3. $|z| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$.

En notant θ un argument de z, on obtient $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$.

Donc un argument de z est égal à $\frac{\pi}{6}$.

Donc $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

4. $|z| = \left|\sqrt{3} - \mathrm{i}\right| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$.

En notant θ un argument de z, on obtient $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{1}{2}$.

Donc un argument de z est égal à $-\frac{\pi}{6}$.

Donc $z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

5. $|z| = |250 - 250\mathrm{i}| = \sqrt{250^2 + (-250)^2} = 250\sqrt{2}$.

En notant θ un argument de z, on obtient $\cos\theta = \frac{250}{250\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$\sin\theta = \frac{-250}{250\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc un argument de z est égal à $-\frac{\pi}{4}$.

Donc $z = 250\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

6. $|z| = \left|\frac{1}{\sqrt{3}} - \mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

En notant θ un argument de z, on obtient $\cos\theta = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$ et

$\sin\theta = \frac{-1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = -1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc un argument de z est égal à $-\frac{\pi}{3}$.

Donc $z = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

143 1. L'équation $z^2 = -4$ est équivalente à $z^2 - (2\mathrm{i})^2 = 0$ ou encore à $(z - 2\mathrm{i})(z + 2\mathrm{i}) = 0$.
Cette équation « produit nul » est équivalente à $z - 2\mathrm{i} = 0$ ou $z + 2\mathrm{i} = 0$.
Donc les solutions de l'équation sont $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$.

2. L'équation $3z^2 = 27$ est équivalente à $z^2 = 9$.
Or, $9 = 3^2$ donc l'équation est équivalente à $z^2 - 3^2 = 0$ ou encore à $(z - 3)(z + 3) = 0$.
Cette équation « produit nul » est équivalente à $z - 3 = 0$ ou $z + 3 = 0$.
Donc les solutions de l'équation sont 3 et -3.

3. L'équation $4z^2 + 16 = 0$ est équivalente à $z^2 + 4 = 0$ ou encore à $z^2 - (2i)^2 = 0$, ou encore à $(z - 2i)(z + 2i) = 0$.
Cette équation « produit nul » est équivalente à $z - 2i = 0$ ou $z + 2i = 0$.
Donc les solutions de l'équation sont $2i$ et $-2i$.

4. L'équation $-1 + \frac{1}{4}z^2 = 0$ est équivalente à $-4 + z^2 = 0$ ou encore à $z^2 - 2^2 = 0$, ou encore à $(z - 2)(z + 2) = 0$.
Cette équation « produit nul » est équivalente à $z - 2 = 0$ ou $z + 2 = 0$.
Donc les solutions de l'équation sont 2 et -2.

5. L'équation $\frac{z^2}{2} + 13 = 12$ est équivalente à $\frac{z^2}{2} + 1 = 0$ ou encore à $z^2 + 2 = 0$, ou encore à $z^2 - \left(\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)^2 = 0$, ou encore à $\left(z - \sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)\left(z + \sqrt{2}\,\mathrm{i}\right) = 0$
Cette équation « produit nul » est équivalente à $z - \sqrt{2}\,\mathrm{i} = 0$ ou $z + \sqrt{2}\,\mathrm{i} = 0$.
Donc les solutions de l'équation sont $\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ et $-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

6. L'équation $-250z^2 - 2000 = 0$ est équivalente à $z^2 + 8 = 0$ ou encore à $z^2 - \left(2\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2 = 0$, ou encore à $\left(z - 2\sqrt{2}\mathrm{i}\right)\left(z + 2\sqrt{2}\mathrm{i}\right) = 0$
Cette équation « produit nul » est équivalente à $z - 2\sqrt{2}\mathrm{i} = 0$ ou $z + 2\sqrt{2}\mathrm{i} = 0$.
Donc les solutions de l'équation sont $2\sqrt{2}\mathrm{i}$ et $-2\sqrt{2}\mathrm{i}$.