86 **1.** Pour réel x de $[1 ; 7]$, $f(x) = 1{,}5x^2 - 9x + 24 + 48 \times \frac{1}{x}$.

Donc $f'(x) = 1{,}5 \times 2x - 9 \times 1 + 0 + 48\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x - 9 - \frac{48}{x^2}$.

Par conséquent, pour réel x de $[1 ; 7]$, $f'(x) = \frac{3x^3 - 9x^2 - 48}{x^2}$.

Or $3(x - 4)(x^2 + x + 4) = (3x - 12)(x^2 + x + 4)$
$= 3x^3 + 3x^2 + 12x - 12x^2 - 12x - 48$
$= 3x^3 - 9x^2 - 48$

Donc $f'(x) = \frac{3(x-4)(x^2+x+4)}{x^2}$.

2. Pour tout réel x de $[1 ; 7]$, $3 > 0$, $x^2 > 0$ et $x^2 + x + 4 > 0$
donc $f'(x)$ a le même signe que $x - 4$.

3. $x - 4 \leq 0$ équivaut à $x \leq 4$.
On en déduit que $f'(x) \leq 0$ sur $[1 ; 4]$, et par suite $f'(x) \geq 0$ sur $[4 ; 7]$.
f est donc décroissante sur $[1 ; 4]$ et croissante sur $[4 ; 7]$.

4. Comme f est décroissante sur $[1 ; 4]$ et croissante sur $[4 ; 7]$, f admet un minimum en 4.
Ce minimum est $f(4)$.

Or $f(4) = 1{,}5 \times 4^2 - 9 \times 4 + 24 + \frac{48}{4} = 24$.

Le minimum de f sur $[1 ; 7]$ est égal à 24.