Sujet D

1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + 1 > 0$. Donc l'expression $(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 1)$ est du signe de $\mathrm{e}^x - 1$.
$\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$ équivaut à $\mathrm{e}^x \geqslant 1$, ce qui équivaut à $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0$, soit $x \geqslant 0$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.
La seule réponse correcte est la réponse **c.**

2. $f = u \times v$ avec, pour tout réel x, $u(x) = 3x - 2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
Donc $f' = u'v + uv'$ avec, pour tout réel x :
- $u'(x) = 3$
- $v(x) = \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{w(x)}$ avec $w(x) = -x$ et $w'(x) = -1$.

Ainsi, pour tout réel x, $v'(x) = w'(x)\mathrm{e}^{w(x)} = -\mathrm{e}^{-x}$.
Donc, pour tout réel x :
$f'(x) = 3\mathrm{e}^{-x} - (3x - 2)\mathrm{e}^{-x} = (3 - (3x + 2))\mathrm{e}^{-x} = (3 - 3x + 2)\mathrm{e}^{-x} = (5 - 3x)\mathrm{e}^{-x}$.
La seule réponse correcte est la réponse **d.**

3. D'une part, on résout l'inéquation $g(x) \geqslant 0$.
$g(x) \geqslant 0$ équivaut à $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$, soit $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^0$, ce qui équivaut à $x^2 \geqslant 0$, ce qui est toujours vrai quelle que soit la valeur de x.
La réponse **a.** est correcte.

D'autre part, $g = 1 - \mathrm{e}^u$ avec, pour tout $x \in [-1\,;1]$, $u(x) = -x^2$.
Donc $g' = 0 - u'\mathrm{e}^u$ avec, pour tout $x \in [-1\,;1]$, $u'(x) = -2x$.
Ainsi, pour tout $x \in [-1\,;1]$, $g'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$.
Comme, pour tout $x \in [-1\,;1]$, $2\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, on déduit que $g'(x)$ est du signe de x sur $[-1\,;1]$.
Ainsi la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[-1\,;0]$ et croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$, donc g admet un minimum en 0.
La réponse **d.** est correcte.