166 a.● Pour tout nombre réel x, $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2 + 1$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x, $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 2x$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{e^x \times (x^2+1) - e^x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}.$$

● Pour tout nombre réel x, $g(x) = \frac{x^2}{e^{2x+1}} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^{2x+1}$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x :
* $u'(x) = 2x$
* $v(x) = e^{2x+1} = e^{w(x)}$ avec $w(x) = 2x+1$ et $w'(x) = 2$ d'où :

$v'(x) = w'(x)e^{w(x)} = 2e^{2x+1}$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2} = \frac{2x \times e^{2x+1} - x^2 \times 2e^{2x+1}}{(e^{2x+1})^2} = \frac{e^{2x+1}(2x-2x^2)}{e^{2x+1} \times e^{2x+1}} = \frac{2x-2x^2}{e^{2x+1}}.$$

b. ● Pour tout nombre réel x, $f(x) = 4e^{\cos(x)} = 4e^{u(x)}$ avec $u(x) = \cos(x)$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $u'(x) = -\sin(x)$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :
$f'(x) = 4u'(x)e^{u(x)} = -4\sin(x)e^{\cos(x)}$.

● Pour tout nombre réel x, $g(x) = \frac{\sin(x)}{e^{-x}} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = e^{-x}$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x :
* $u'(x) = \cos(x)$
* $v(x) = e^{-x} = e^{w(x)}$ avec $w(x) = -x$ et $w'(x) = -1$, d'où $v'(x) = w'(x)e^{w(x)} = -e^{-x}$.

Donc, pour tout réel x :

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{\cos(x)e^{-x} + \sin(x)e^{-x}}{(e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}(\cos(x) + \sin(x))}{e^{-x} \times e^{-x}}$$
$$= \frac{\cos(x) + \sin(x)}{e^{-x}}.$$