Chapitre 9
La fonction exponentielle de base e

Revoir des points essentiels

176 **a.** Pour tous réels x et y, $e^x e^y = e^{x+y}$, donc pour tout réel t,
$e^{-5t} \times e^{17t-2} = e^{-5t+17t-2} = e^{12t-2}$.

b. Pour tout réel x et pour tout n entier relatif, $(e^x)^n = e^{nx}$,
donc pour tout réel t, $\frac{e^{9t}}{(e^{2t})^2} = \frac{e^{9t}}{e^{4t}}$.

Pour tous réels x et y, $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$, donc pour tout réel t, $\frac{e^{9t}}{e^{4t}} = e^{9t-4t} = e^{5t}$.

Conclusion : pour tout réel t, $\frac{e^{9t}}{(e^{2t})^2} = e^{5t}$.

c. Pour tous réels x et y, $e^x e^y = e^{x+y}$, donc pour tout réel t, $\frac{e^{-5t} \times e^t}{e^{7t}} = \frac{e^{-4t}}{e^{7t}}$.

Pour tous réels x et y, $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$, donc pour tout réel t, $\frac{e^{-4t}}{e^{7t}} = e^{-4t-7t} = e^{-11t}$.

Conclusion : pour tout réel t, $\frac{e^{-5t} \times e^t}{e^{7t}} = e^{-11t}$.

d. Pour tout réel x et pour tout n entier relatif,
$(e^x)^n = e^{nx}$, donc pour tout réel t, $(e^{-t})^4 \times e^{-4} = e^{-4t} \times e^{-4}$.
Pour tous réels x et y, $e^x e^y = e^{x+y}$ donc pour tout réel t, $e^{-4t} \times e^{-4} = e^{-4t-4}$.
Conclusion : pour tout réel t, $(e^{-t})^4 \times e^{-4} = e^{-11t}$.

e. Pour tout réel x et pour tout n entier relatif,
$(e^x)^n = e^{nx}$, donc pour tout réel t, $(e^{-t})^2 \times (e^{t+1})^2 = e^{-2t} \times e^{2t+2}$.
Pour tous réels x et y, $e^x e^y = e^{x+y}$, donc pour tout réel t, $e^{-2t} \times e^{2t+2} = e^2$.
Conclusion : pour tout réel t, $(e^{-t})^2 \times (e^{t+1})^2 = e^2$.

f. Pour tous réels x et y, $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$, donc pour tout réel t, $\frac{e^{2t-1}}{e^{2t+1}} = e^{2t-1-(2t+1)} = e^{-2}$.

g. Pour tout réel x et pour tout n entier relatif,
$(e^x)^n = e^{nx}$, donc pour tout réel t, $\frac{(e^{-3t})^2 \times e^{-t}}{e^t} = \frac{e^{-6t} \times e^{-t}}{e^t}$.

Pour tous réels x et y, $e^x e^y = e^{x+y}$, donc pour tout réel t, $\frac{e^{-6t} \times e^{-t}}{e^t} = \frac{e^{-7t}}{e^t}$.

Pour tous réels x et y, $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$, donc pour tout réel t, $\frac{e^{-7t}}{e^t} = e^{-8t}$.

Conclusion : pour tout réel $t, \frac{\left(e^{-3t}\right)^2 \times e^{-t}}{e^t} = e^{-8t}$.

h. Pour tous réels x et y, $e^x e^y = e^{x+y}$, donc $\frac{e^t \times e^{-2t} \times e^{3t}}{(e^{4t})^5} = \frac{e^{2t}}{(e^{4t})^5}$.

Pour tout réel x et pour tout n entier relatif,

$(e^x)^n = e^{nx}$, donc pour tout réel $t, \frac{e^{2t}}{(e^{4t})^5} = \frac{e^{2t}}{e^{20t}}$.

Pour tous réels x et $y, \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$, donc pour tout réel $t, \frac{e^{2t}}{e^{20t}} = e^{-18t}$.

Conclusion : pour tout réel $t, \frac{e^t \times e^{-2t} \times e^{3t}}{(e^{4t})^5} = e^{-18t}$.

177 **a.** Pour tout réel x,

$g(x) = (3x + 4)e^x = u(x)\ v(x)$ avec $u(x) = 3x + 4$ et $v(x) = e^x$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x, u'(x) = 3$ et $v'(x) = e^x$.

$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 3e^x + (3x + 4)e^x = e^x(3x + 7)$.

Comme pour tout réel x, $e^x > 0$, on en déduit que $g'(x)$ est du signe de $3x + 7$.

$g'(x) \leq 0$ équivaut à $3x + 7 \leq 0$, ce qui est équivalent à $x \leq -\frac{7}{3}$.

Ainsi, $g'(x) \leq 0$ sur $\left]-\infty\,; -\frac{7}{3}\right]$ et $g'(x) \geq 0$ sur $\left[-\frac{7}{3}\,; +\infty\right[$, donc g est décroissante sur $\left]-\infty\,; -\frac{7}{3}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{7}{3}\,; +\infty\right[$.

b. Pour tout réel x, $g(x) = 2e^{-x} - 8x = 2u(x) + v(x)$ avec $u(x) = e^{-x}$ et $v(x) = -8x$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$:

• $u(x) = e^{-x} = e^{w(x)}$ avec $w(x) = -x$ et $w'(x) = -1$;

ainsi $u'(x) = w'(x)e^{w(x)} = -e^{-x}$

• $v'(x) = -8$.

Pour tout réel x, $g'(x) = 2u'(x) + v'(x) = -2e^{-x} - 8 = -2(e^{-x} + 4)$.

Or pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc $e^{-x} + 4 > 0$ et $-2 < 0$.

Par conséquent, $g'(x) < 0$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c. Pour tout réel $x, g(x) = 3xe^x = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = e^x$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x, u'(x) = 3$ et $v'(x) = e^x$.

$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 3e^x + 3xe^x = 3e^x(1 + x)$.

Or pour tout réel x, $3e^x > 0$ donc $g'(x)$est du signe de $1 + x$.

$g'(x) \leq 0$ équivaut à $1 + x \leq 0$, ce qui est équivalent à $x \leq -1$.

Ainsi, $g'(x) \leq 0$ sur $]-\infty\,; -1]$ et $g'(x) \geq 0$ sur $[-1\,; +\infty[$, donc g est décroissante sur $]-\infty\,; -1]$ et croissante sur $[-1\,; +\infty[$.

d. Pour tout réel $x, g(x) = 100e^{-0{,}125x} = 100e^{u(x)}$

avec $u(x) = -0{,}125x$ et $u'^{(x)} = -0{,}125$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 100 \times\ u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = -12{,}5\mathrm{e}^{-0{,}125x}$.
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-0{,}125x} > 0$ et $-12{,}5 < 0$ d'où $g'(x) < 0$, donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

e. Pour tout réel $x, g(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{1}{v(x)}$ avec $v(x) = \mathrm{e}^x + 1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = \frac{-v'(x)}{\left(v(x)\right)^2} = \frac{-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}.$$

Pour tout réel $x, -\mathrm{e}^x < 0$ et $(\mathrm{e}^x + 1)^2 > 0$ d'où $g'(x) < 0$,
donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

f. Pour tout réel $x, g(x) = \frac{\mathrm{e}^x-2}{\mathrm{e}^x+2} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x - 2$ et $v(x) = \mathrm{e}^x + 2$.
Les fonctions $u\ et\ v$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$u'(x) = \mathrm{e}^x\ et\ v'(x) = \mathrm{e}^x$.
Ainsi la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = \frac{u\prime(x)v(x)-u(x)v\prime(x)}{(v(x))^2} = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+2)-(\mathrm{e}^x-2)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+2)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+2-\mathrm{e}^x+2)}{(\mathrm{e}^x+2)^2} = \frac{4\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+2)^2}.$$

Pour tout réel $x, 4\mathrm{e}^x > 0$ et $(\mathrm{e}^x + 2)^2 > 0$ d'où $g'(x) > 0$, donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.