Chapitre 4 Suites géométriques

A Notre point de vue

1 Les choix faits pour traiter le programme dans ce chapitre

Ce chapitre, constitué d'une seule séquence, traite de la notion de suites géométriques.
Il est dans le prolongement du chapitre 3 « Croissance linéaire » cqui aborde la notion de suite et fait le lien entre les notions de croissance linéaire et de suite arithmétique.
De plus, ce chapitre apporte les outils nécessaires aux concepts abordés dans le chapitre 5 « Croissance exponentielle », à savoir les notions de croissance exponentielle et de fonction exponentielle.
Ces trois chapitres vont donner aux élèves les outils nécessaires pour étudier différents phénomènes d'évolution.

2 Les objectifs des activités

La première activité « Carrés gigognes » permet d'introduire la notion de suite géométrique en proposant de modéliser l'évolution discrète de l'aire de carrés et d'établir, dans un cas particulier, l'expression du terme général d'une telle suite.
La seconde activité propose d'étudier l'évolution des termes d'une suite géométrique et d'en tracer une représentation graphique.

3 Exercices

La page « Pour démarrer » est constituée d'exercices simples qui permettent de s'assurer de la bonne compréhension des concepts abordés dans la partie Cours.
On y trouve, entre autres, des questions flash permettant de travailler l'oral avec les élèves.
Les sept pages d'exercices « Pour s'entraîner » proposent d'aborder les notions du programme de façon progressive. Ces exercices sont classés suivant les différentes « capacités attendues » du programme : « calculer un terme de rang donné d'une suite géométrique », « reconnaître un phénomène discret de croissance exponentielle et savoir le modéliser », « réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite géométrique » et « résoudre un problème de seuil ».
Et parmi ces exercices, des exercices correspondent aux « Situations et problèmes » proposés dans le programme :
- **Sciences de la Vie** : élimination d'une substance dans le sang (exercice **40**, page 55) ;
- **Dénombrement** : motifs géométriques évolutifs (exercices **53** et **54**, page 58) ;
- **Éducation économique, financière et budgétaire** : emprunt, placement à intérêts composés, gestion d'une dette, croissance d'un poste budgétaire (exercice **29**, page 53 - exercice **33**, page 54 - exercice 44, page 56) ;

Ces exercices permettent à chaque élève « d'appréhender la pertinence des démarches mathématiques et de développer des aptitudes intellectuelles comme la rigueur, la logique, l'esprit critique mais aussi l'inventivité et la créativité ».
Le chapitre se termine par une page d'automatismes.

B Activités

Activité 1 Carrés gigognes

1. a. L'aire du carré vert est 4 unités d'aire (u.a).

b. Il y a 8 demi-carreaux, c'est-à-dire 4 carreaux de plus qu'à l'étape 1 ; donc l'aire du carré orange est 4 + 4, soit 8 u.a.

c. L'aire du carré bleu est 16 u.a. et celle du carré violet 32 u.a.

d. L'aire est multipliée par 2 d'une étape à l'autre.

2. a. On a $u_1 = 8$; $u_2 = 16$; $u_3 = 32$.

b. La formule est $u_{n+1} = 2u_n$.

c. La raison de la suite (u_n) est 2.

3. a. On a $u_1 = 2u_0$; $u_2 = 2u_1 = 2 \times 2u_0$, soit $u_2 = 2^2u_0$; $u_3 = 2u_2 = 2 \times 2^2u_0$, soit $u_3 = 2^3u_0$ …
On semble avoir la relation : $u_{n+1} = 2^nu_0$.

b. En appliquant la formule pour $n = 14$, on obtient $u_{14} = 2^{14}u_0 = 16\,384 \times 4 = 65\,536$.

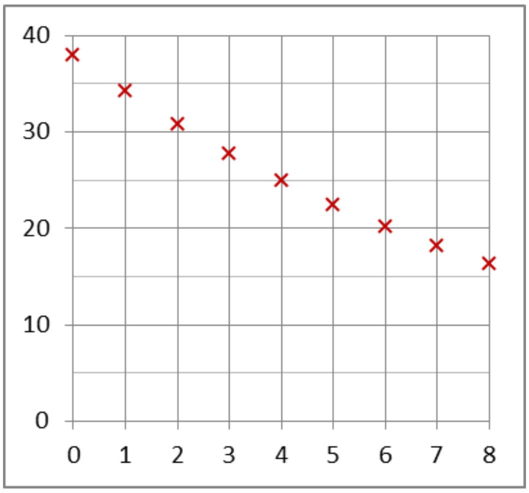
Activité 2 Frais de fonctionnement d'une ONG

1. a. Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 10 % est 0,9.
Ainsi, le montant, en millions d'euros, des frais de fonctionnement prévus pour l'année 2022 est : $v_1 = 0{,}9 \times v_0 = 34{,}2$.
b. On a $v_2 = 0{,}9 \times v_1 = 30{,}78$ et $v_3 = 0{,}9 \times v_2 = 27{,}702$.

c. D'une année sur l'autre, le montant des frais est multiplié par 0,9.

d. $v_{n+1} = 0{,}9v_n$. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9.

2. a.



b. La suite est décroissante : quand n augmente, v_n diminue.

C. Exercices

Pour démarrer

1 $u_1 = q \times u_0 = 1{,}5 \times 4 = 6$.

2 $v_1 = q \times v_0 = 3 \times 2 = 6$; $v_2 = q \times v_1 = 3 \times 6 = 18$; $v_3 = q \times v_2 = 3 \times 18 = 54$.

3 Premier terme : 800 ; deuxième terme : $800 \times 0{,}75 = 600$;

troisième terme : $600 \times 0{,}75 = 450$; quatrième terme : $450 \times 0{,}75 = 337{,}5$;

cinquième terme : $337{,}5 \times 0{,}75 = 253{,}125$.

4 **1.** $u_{n+1} = 5u_n$.

2. $v_{n+1} = 0{,}4v_n$.

5 **1. Vrai** : on a $u_{n+1} = qu_n$, soit $u_{n+1} = 5u_n$.

2. Faux : il faudrait avoir $u_{n+1} = 7u_n$ et non $u_{n+1} = 7u_n + 1$.

6 On a $w_n = w_0 \times q^n$, soit $w_n = 80 \times 1{,}2^n$. **Réponse b**.

7 **1.** $v_1 = 0{,}8 \times v_0$ car le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 20 % est 0,8.
La valeur de la voiture au 1er janvier 2023 est $0{,}8 \times 30\,000$, soit 24 000 €.

2. $v_2 = 0{,}8 \times v_1 = 0{,}8 \times 24\,000$. La valeur de la voiture au 1er janvier 2024 est 19 200 €.

3. $v_3 = 0{,}8 \times v_2 = 0{,}8 \times 19\,200$. La valeur de la voiture au 1er janvier 2025 est 15 360 €.

4. La suite des nombres v_0, v_1, v_2 et v_3 est une suite géométrique de premier terme 30 000 et de raison 0,8.

8 **1.** Le coefficient multiplicateur associé à cette augmentation est 1,05.

2. Valeur du vélo en 2022 : 1 600 € × 1,05 = 1 680 €.
Valeur du vélo en 2023 : 1 680 € × 1,05 = 1 764 €.
Valeur du vélo en 2024 : 1 764 € × 1,05 = 1 852,20 €.

3. Ces valeurs forment les termes d'une suite géométrique de premier terme 1 600 et de raison 1,05 car le prix est multiplié par 1,05 d'une année sur l'autre.

9 **1.** La suite est croissante car $q = 2 > 1$.

2. La suite est croissante car $q = 3{,}5 > 1$.

3. La suite est décroissante car $0 < q = 0{,}37 < 1$.

4. La suite est décroissante car $0 < q = 0{,}9 < 1$.

10 Le premier terme est 12 et la raison est $\frac{1}{2}$ car les premiers termes sont successivement 12, 6, 3 … **Réponse d**.

11 **1.** Dans la colonne **B**, la première valeur supérieure à 3 500 est 3 870 (dans la cellule **B10**) ce qui correspond au terme de rang 8. On a $u_n > 3\,500$ pour $n \geq 8$.

2. Dans la colonne **C**, la première valeur inférieure à 2 500 est 2 391 (dans la cellule **C9**) ce qui correspond au terme de rang 7. On a $v_n < 2\,500$ pour $n \geq 7$.

Pour s'entraîner

12 **1.** Pour passer de $u_0 = 4$ à $u_1 = 5$, on multiplie par $\frac{5}{4} = 1{,}25$. La raison est $\frac{5}{4} = 1{,}25$.

2. Pour passer de $v_3 = 12$ à $v_4 = 9$, on multiplie par $\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. La raison est $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

13 **1.** $u_0 = 3 \times 2^0$; $u_{10} = 3 \times 2^{10} = 3\,072$; $u_{10} = 2u_9$ car la raison est 2. **Réponses b, c et d**.

2. Comme $v_0 = 5$ et $v_{n+1} = 3v_n$, (v_n) est la suite de premier terme 5 et de raison 3.
Ainsi $v_1 = 3v_0 = 3 \times 5 = 15$, $v_2 = 3v_1 = 3 \times 15 = 45$ et $v_{10} = 3v_9$. **Réponses a, c et d**.

14 **1.** On a $w_n = w_0 \times q^n$, soit $w_n = 3 \times 4^n$.
2. $w_6 = 3 \times 4^6 = 12\,288$.

15 **1.** On a $u_n = u_0 \times q^n$, soit $u_n = 5 \times 2^n$.
2. $u_8 = 5 \times 2^8 = 1\,280$.

16 **1.** On a $v_n = v_1 \times q^{n-1}$, soit $v_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

2. $v_7 = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{4}{729} \approx 0{,}0055$.

17 **1.** On a $u_n = u_0 \times q^n$, soit $u_n = 16 \times 1{,}5^n$.
2. Comme le premier terme est $u_0 = 16$, le neuvième terme est $u_8 = 16 \times 1{,}5^8 = 410{,}0625$.

18 • On a $\frac{19{,}2}{12{,}8} = \frac{28{,}8}{19{,}2} = \frac{43{,}2}{28{,}8} = \frac{64{,}8}{43{,}2} = \frac{97{,}2}{64{,}8} = 1{,}5$.
Les termes de la suite (u_n) sont ceux d'une suite géométrique.
• On a $\frac{54{,}6}{54} \neq \frac{55{,}2}{54{,}6}$.
Les termes de la suite (v_n) ne sont pas ceux d'une suite géométrique.

• On a $\frac{6\,144}{8\,192} = \frac{4\,608}{6\,144} = \frac{3\,456}{4\,608} = \frac{2\,592}{3\,456} = \frac{1\,944}{2\,592} = 0{,}75$.
Les termes de la suite (w_n) sont ceux d'une suite géométrique.

• On a $\frac{10}{3} \neq \frac{19}{10}$. Les termes de la suite (t_n) ne sont pas ceux d'une suite géométrique.

19 Si (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 7$ et de raison 3, on a

$v_n = v_0 \times q^n = 7 \times 3^n$. Alors, $v_8 = 7 \times 3^8 = 45\,927$. **Réponses a et b**.

20 $w_n = w_1 \times q^{n-1}$, soit $w_n = 1\,500 \times 0{,}8^{n-1}$.
Ainsi, $w_{12} = 1\,500 \times 0{,}8^{11} \approx 128{,}85$. **Réponses a et c**.

21 **1. Faux** : on a $u_0 = 5$; $u_1 = \frac{1}{5} = 0{,}2$; $u_2 = \frac{1}{0{,}2} = 5$, soit $u_1 = \frac{1}{25}u_0$ et $u_2 = 25u_1$.

2. Vrai : pour tout entier n, on a $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$, soit une expression de la forme $u_{n+1} = qu_n$.

La suite est géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

3. Vrai : pour tout entier n, on a $u_n = 1 \times 10^n$, soit une forme $u_n = u_0\, q^n$.
La suite est géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 10$.

4. Vrai : pour tout entier n, on a $u_n = 1 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$, soit une forme $u_n = u_0\, q^n$.

La suite est géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{5}{3}$.

22 **1.** Pour tout entier n, on a une forme $u_n = u_0 \times q^n$.
La suite est géométrique de premier terme $u_0 = 120$ et de raison $q = 1{,}05$.

2. Pour tout entier n, on a $w_n = 5 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$, soit une forme $w_n = w_0 \times q^n$.

La suite est géométrique de premier terme $w_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{12}$.

3. Pour tout entier n, on a $t_n = \frac{1}{5} \times 2^n$, soit une forme $t_n = t_0 \times q^n$.

La suite est géométrique de premier terme $t_0 = \frac{1}{5}$ et de raison 2.

23 **1.** $u_{n+1} = 0{,}75u_n$.

2. La valeur à placer en **B2** est 1 250.

3. La formule à placer en **B3** est =B2*0,75.

24 **1. Réponses a et b**.

2. Réponses b et d.

25 **1.** Le premier terme est la première valeur contenue par la variable U, soit 6 d'après l'instruction « **6 ← U** ».
L'instruction « **U ← 3 × U** » indique que l'on multiplie U par 3 pour passer d'un terme au suivant, la raison est 3.

2. Il y a dix termes : celui obtenu avec l'instruction « **6 ← U** » et les neufs termes obtenus avec l'instruction « **Pour *k* variant de 1 à 9** ».

26 **1.**

```python
def terme_suite(n):
    u = 32
    for k in range (1, n):
        u = 2.5*u
    return u
```

2. Dans la console, il faut saisir l'instruction `terme_suite(12)`. La valeur retournée étant 762939,453 à 0,001 près.

27 **1. Faux :** la suite est géométrique de raison 1,03 car le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 3 % est 1,03 ; on a $u_{n+1} = 1{,}03u_n$.

2. Faux : D'après l'énoncé, on a $v_{n+1} = v_n - 30$ ce qui signifie que la suite est arithmétique de raison –30.

28 Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 2 % est 1,02, ainsi $c_{n+1} = 1{,}02c_n$.
On en déduit que la suite (c_n) est géométrique de raison 1,02 ; on a donc $c_n = c_0 \times 1{,}02^n$.

Réponse b.

29 **1.** Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 2,5% est 1,025.
On a $c_1 = 1{,}025c_0 = 1{,}025 \times 15\ 000 = 15\ 375$ et $c_2 = 1{,}025c_1 = 1{,}025 \times 15\ 375 = 15\ 759{,}375$, soit 15 759,38 arrondi au centime d'euro.
2. D'après l'énoncé, on a $c_{n+1} = 1{,}025c_n$ ce qui signifie que la suite (c_n) est géométrique de raison 1,025.

3. On a $c_n = c_0 \times q^n$, soit $c_n = 15\ 000 \times 1{,}025^n$.

4. Le capital disponible au bout de 12 ans est $c_{12} = 15\ 000 \times 1{,}025^{12}$, soit 20 173,33 arrondi au centime d'euro.

30 Si on note u_n le nombre de factures établies l'année 2017 + n, on a :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{112}{115} \approx 0{,}974 \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{110}{112} \approx 0{,}982.$$

On ne passe pas de $u_0 = 115$ à $u_1 = 112$ et de $u_1 = 112$ à $u_2 = 110$ en multipliant par un même nombre. La suite n'est pas géométrique.

31 Si on note v_n le nombre d'ouvrages inventoriés l'année 2022 + n, d'après l'énoncé, on a $v_{n+1} = 0{,}9v_n + 400$.

La suite (v_n) n'est pas de la forme $v_{n+1} = qv_n$; elle n'est donc pas géométrique.

32 Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 3 % est 1,03 ; si on note w_n le nombre d'abonnés l'année 2022 + n, on a $w_{n+1} = 1{,}03w_n$.
La suite (w_n) est donc géométrique de premier terme 15 000 et de raison 1,03.
$w_5 = 15\ 000 \times 1{,}03^5 \approx 17\ 389$, il devrait y avoir 17 389 abonnés en 2027.

33 *Un fichier logiciel est disponible dans le manuel numérique enseignant, le manuel numérique élève et sur le site enseignant indice.editions-bordas.fr.*

Partie A

1. a. $I_1 = 400\ 000 \times 0{,}05 = 20\ 000$.

b. La partie de capital remboursée (l'amortissement) lors du versement de la première annuité est $A_1 = 25\ 000 - 20\ 000$, soit 5 000 florins.

c. Le montant C_1 du capital restant dû après versement de la première annuité est $C_1 = C_0 - A_1 = 400\ 000 - 5\ 000$, soit 395 000 florins.

2. $I_2 = 395\ 000 \times 0{,}05 = 19\ 750$.

$A_2 = 25\ 000 - 19\ 750 = 5\ 250$ et $C_2 = C_1 - A_2 = 395\ 000 - 5\ 250 = 389\ 750$.

3.a. Formule en **D3** : `=0,05*B3` ; en **E3** : `=C3-D3` ; en **F3** : `=B3-E3`.

b. La formule saisie en **B4** est **=F3** car le capital restant dû à la fin de l'année *n* est le capital restant dû au début de l'année $n + 1$.

c. Voir fichier réponse.

4.a. La dette sera éteinte à la fin de la 33e année.

b. Le montant du dernier versement est d'environ 24 681 florins, soit 23 506 florins de capital et 1 175 florins d'intérêts.

Partie B

1. Avec la formule **=E4/E3** dans la cellule **G4**, recopiée vers le bas, on obtient le quotient des termes consécutifs de la suite (A_n). Ces quotients sont tous égaux à 1,05, on peut conjecturer que la suite (A_n) est géométrique de raison 1,05.

2. ● « Le capital C_n restant dû après versement de la $n^{\text{ème}}$ annuité est alors $\boldsymbol{C_{n-1}}$ diminué de A_n » se traduit par $C_{n-1} - A_n = C_n$, soit $C_{n-1} - C_n = A_n$.

● « L'intérêt annuel I_n égal à 5 % du capital restant dû » se traduit par $I_n = 0{,}05 \times C_{n-1}$.

● « L'amortissement A_n qui est la somme restante, consacrée au remboursement d'une partie du capital restant dû l'année *n* » se traduit par $A_n = 25\,000 - I_n$.

3.a. $A_n = 25\,000 - I_n = 25\,000 - 0{,}05 \times C_{n-1}$.

b. En remplaçant *n* par $n+1$ dans la relation précédente, on obtient $A_{n+1} = 25\,000 - 0{,}05 \times C_n$.

4. $A_{n+1} - A_n = (25\,000 - 0{,}05 \times C_n) - (25\,000 - 0{,}05 \times C_{n-1}) = 0{,}05(C_{n-1} - C_n)$.

Ainsi, $A_{n+1} - A_n = 0{,}05\,(C_{n-1} - C_n) = 0{,}05A_n$.

5. De $A_{n+1} - A_n = 0{,}05A_n$, on déduit que $A_{n+1} = A_n + 0{,}05A_n$, soit $A_{n+1} = 1{,}05A_n$.

On en déduit que la suite (A_n) est géométrique de raison 1,05.

34 **1.** La suite (u_n) est croissante car $q = 3{,}2 > 1$.

2. La suite (v_n) est décroissante car $0 < q = 0{,}74 < 1$.

35 **1.** La suite (u_n) est décroissante car $0 < q = 0{,}3 < 1$.

2. La suite (v_n) est croissante car $q = 2{,}5 > 1$.

3. La suite (w_n) est décroissante car $0 < q = \frac{1}{3} < 1$.

36 **1.** La suite (u_n) est décroissante car $0 < q = 0{,}9 < 1$.

2. On a $w_n = \frac{3^n}{5^n} = 1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$. La suite ($w_n$) est décroissante car $0 < q = \frac{3}{5} < 1$.

3. On a $t_n = 3 \times 5^{n+1} = 3 \times 5 \times 5^n = 15 \times 5^n$. La suite ($t_n$) est croissante car $q = 5 > 1$.

37 - Le graphique 1 ne peut pas représenter une suite géométrique car le nuage de points est décroissant, puis croissant.

- Le nuage de points du graphique 2 peut correspondre à une croissance exponentielle, il peut représenter une suite géométrique.

38 - Le graphique 1 ne peut pas représenter une suite géométrique car le nuage de points est aligné, il peut représenter une suite arithmétique en revanche.

- Le nuage de points du graphique 2 peut correspondre à une (dé)croissance exponentielle, il peut représenter une suite géométrique.

39 - Graphique 1 : $u_0 = 80$ et $u_1 = 60$ donc $q = \frac{u_1}{u_0} = 0{,}75$.
La suite est de premier terme 80 et de raison 0,75.

- Graphique 2 : $u_0 = 100$ et $u_1 = 125$ donc $q = \frac{u_1}{u_0} = 1{,}25$.
La suite est de premier terme 100 et de raison 1,25.

40 **1.** La quantité de médicament baisse de façon constante d'une heure à la suivante, on peut modéliser la situation à l'aide d'une suite arithmétique, c'est le nuage de points bleus qui correspond au médicament M_1. **Réponse b**.

2. Il faut attendre 7 h pour que le nuage de points bleus affiche des points d'ordonnées inférieures à 2. **Réponse d**.

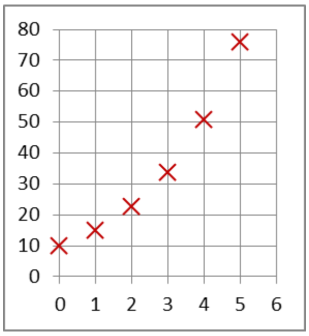
3. La formule qu'il a fallu saisir dans la cellule **C4** est **=C3*100/B2**. **Réponse c**.

4. Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 3 % est 0,7, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7. **Réponse c**.

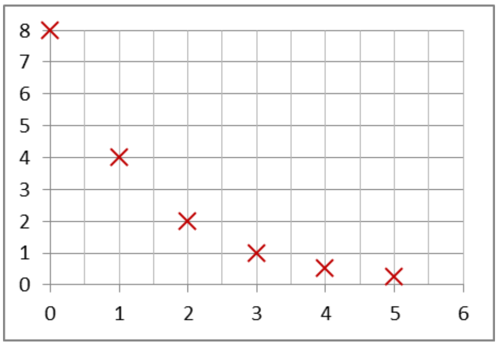
5. Deux baisses successives de 30 % correspondent à un coefficient multiplicateur de $0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$. Ce coefficient correspond à une baisse de 51 %. **Réponse a**.

41 **1.a.** Comme la suite est croissante, le terme ayant la plus petite valeur est le premier terme $u_0 = 10$.
b. Le terme ayant la plus grande valeur est le dernier terme $u_5 = 10 \times 1{,}5^5 \approx 76$.
2. L'échelle doit permettre d'aller de 0 à 80.
Ce qui, avec l'échelle proposée, représente un graphique de 8 cm de haut.

3.

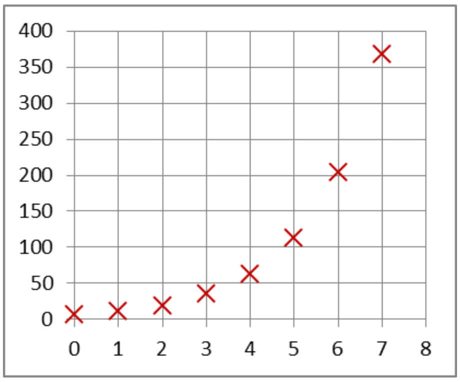


42 **1.a.** Comme la suite est décroissante, le terme ayant la plus petite valeur est le dernier terme $u_5 = 8 \times 0{,}5^5 = 0{,}25$.
b. Le terme ayant la plus grande valeur est le premier terme $u_0 = 8$.
2. L'échelle doit permettre d'aller de 0 à 8, on peut choisir 1 cm = 1 unité ce qui représente un graphique de 8 cm de haut.
3.



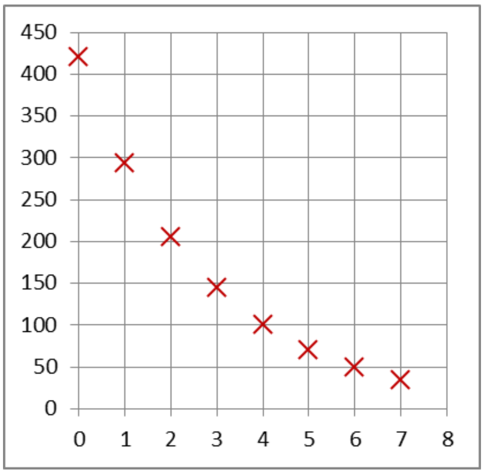
43 **1.** Comme la suite est croissante, le terme ayant la plus petite valeur est le premier terme $u_0 = 6$. Le terme ayant la plus grande valeur est le dernier terme $u_7 = 6 \times 1{,}8^7 \approx 367$.

L'échelle doit permettre d'aller de 0 à 400, on peut choisir 1 cm = 50 unités ce qui représente un graphique de 8 cm de haut.



2. Comme la suite est décroissante, le terme ayant la plus petite valeur est le dernier terme $v_7 = 420 \times 0{,}7^7 \approx 34{,}6$. Le terme ayant la plus grande valeur est le premier terme $v_0 = 420$.

L'échelle doit permettre d'aller de 0 à 450, on peut choisir 1 cm = 50 unités ce qui représente un graphique de 9 cm de haut.



44 **1.** (a_n) est une suite arithmétique de premier terme 700 et de raison 50.
(b_n) est une suite géométrique de premier terme 500 et de raison 1,12.
(c_n) est une suite géométrique de premier terme 300 et de raison 1,2.

2. Pour tout entier n : $a_n = 700 + 50n$; $b_n = 500 \times 1{,}12^n$ et $c_n = 300 \times 1{,}2^n$.
3. De 2021 à 2027, *Aliotech* a le chiffre d'affaires le plus élevé.
En 2028, Biotech a le chiffre d'affaires le plus élevé.
À partir de 2029, *Cyberbio* a le chiffre d'affaires le plus élevé.

4. Tableau de valeurs des trois suites :

	A	B	C	D	E
1	**Année**	***n***	u_n	v_n	w_n
2	2021	0	700	500	300
3	2022	1	750	560	360
4	2023	2	800	627,2	432
5	2024	3	850	702,464	518,4
6	2025	4	900	786,76	622,08
7	2026	5	950	881,171	746,496
8	2027	6	1000	986,911	895,795
9	2028	7	1050	1105,34	1074,95
10	2029	8	1100	1237,98	1289,95
11	2030	9	1150	1386,54	1547,93

45 **1.** Le plus petit entier est $n = 6$, $u_6 = 409 > 400$.

2. Le plus petit entier est $n = 7$, $v_7 = 11 < 15$.

46 Le plus petit entier est $n = 5$ car $u_4 = 18 > v_4 = 17{,}09$ et $u_5 = 20 < v_5 = 21{,}36$.

47 **1.** La suite est décroissante car $0 < q = 0{,}72 < 1$.

2. Pour n entier non nul, $w_n = 2\,400 \times 0{,}72^{n-1}$.

3. Le plus petit entier naturel n tel que $w_n < 100$ est $n = 11$ car $w_{10} \approx 125 > 100$ et

$w_{11} \approx 90 < 100$.

48 **1.** Le rendement sera inférieur à 600 kWh/an à partir de l'année 2026.

2. Le rendement sera réduit de moitié, c'est-à-dire inférieur à 450 kWh/an à partir de l'année 2030.

49 **1.** Le premier terme est la première valeur contenue par la variable U, soit 9 d'après l'instruction « **U ← 9** ».
L'instruction « **U ← 2×U** » indique que l'on multiplie par 2 pour passer d'un terme de la suite au suivant, la raison est donc 2.

2. L'instruction « **Tant que U < 100** » indique que la valeur du seuil est 100.

3.a. La valeur contenue par la variable N est 4 et celle contenue par la variable U est 144.

b. Ces valeurs correspondent au plus petit entier naturel N tel que le terme U de la suite soit inférieur à 100 et au terme U de la suite correspondant.

50 *Un fichier logiciel est disponible dans le manuel numérique enseignant, le manuel numérique élève et sur le site enseignant indice.editions-bordas.fr.*
1. Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 8% est 0,92.
On a $u_1 = 0{,}92u_0 = 0{,}92 \times 2 = 1{,}84$.
Au bout d'une heure, il y a 1,84 cm^3 de médicament dans le sang du malade.
2. a. $u_{n+1} = 0{,}92u_n$.

b. (u_n) est une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 0,92.

3.

```python
def volMedicament(S):
    u = 2
    n = 0
    while u > S:
        u = u*0.92
        n = n+1
    return n
```

4. a. Dans la console, on doit saisir l'instruction : `volMedicament(1.5)`.

b. L'instruction `volMedicament(1.5)` renvoie la valeur 4.

Le médicament reste actif 4 heures chez un malade dont le seuil est estimé à 1,5 cm^3.

51 Notons (d_n) le débit, en m^3, de la rivière le $n^{\text{ième}}$ jour de juin.

On a $d_1 = 300$ et $d_{n+1} = 0{,}8d_n$ car le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 20 % est 0,8. (d_n) est donc une suite géométrique de premier terme $d_1 = 300$ et de raison 0,8.

On en déduit que, pour tout entier n non nul, $d_n = 300 \times 0{,}8^{n-1}$.

1. Le débit de la rivière le 13 juin est $d_{13} = 300 \times 0{,}8^{12}$, soit environ 20,6 m^3.

2. On a $d_{16} = 300 \times 0{,}8^{15} \approx 10{,}6 > 10$ et $d_{17} = 300 \times 0{,}8^{16} \approx 8{,}4 < 10$.

Le 17 juin, le débit sera réduit à moins de 10 m^3 par jour.

52 **1.** Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 8,3 % est 0,917.
$u_1 = 0{,}917u_0 = 0{,}917 \times 10^6 = 917\,000$ et $u_2 = 0{,}917u_1 = 0{,}917 \times 917\,000 = 840\,889$.

2. $u_{n+1} = 0{,}917u_n$; (u_n) est une suite géométrique de premier terme 10^6 et de raison 0,917.

On a $u_n = 10^6 \times 0{,}917^n$.

3. Le nombre de noyaux d'iode 131 présents dans l'échantillon au bout de 5 jours est $u_5 = 10^6 \times 0{,}917^5$, soit environ 648 405 noyaux.

4.a. La valeur n retournée par cette fonction est le nombre de jours nécessaires pour que le nombre de noyaux soit réduit au moins de moitié.

b. Si on exécute l'appel `iode()` dans la console, on obtient la valeur 8.

c. Il faut 8 jours pour que la population de noyaux soit diminuée au moins de moitié.

5. Ligne **3**, il faut remplacer `u = 10**6` par `u = 10**8`.

Ligne **4**, il faut remplacer `while u > 10**6/2` par `while u > 10**8/2`.

Ligne **6**, il faut remplacer `u = 0.917*u` par `u = 0.977*u`.

Si on exécute à nouveau l'appel `iode()` dans la console, on obtient la valeur 30.
Ce qui signifie que la période de demi-vie du césium 137 est de 30 années.

53 **1.** $N_1 = 3$; $A_1 = \frac{3}{4}$; $N_2 = 3 \times 3 = 9$; $A_2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$; $N_3 = 3 \times 9 = 27$; $A_3 = \frac{3}{4} \times \frac{9}{16} = \frac{27}{64}$.

2. $N_{n+1} = 3 \times N_n$. (N_n) est donc une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3.

$A_{n+1} = \frac{3}{4} \times A_n$. (A_n) est donc une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{3}{4}$.

3. $N_n = 1 \times 3^n = 3^n$. Ainsi, à l'étape 10, $N_{10} = 3^{10} = 59\,049$.

$A_n = 1\times\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Ainsi, à l'étape 10, $A_{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \frac{59\,049}{1\,048\,576}$.

4. On a $N_{12} = 3^{12} = 531\,441 < 10^6$ et $N_{13} = 3^{13} = 1\,594\,323 > 10^6$.

Il y a plus d'un million de triangles bleus à partir de l'étape 13.

On a $A_{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^{16} \approx 0{,}0100226 > 0{,}01$ et $A_{17} = \left(\frac{3}{4}\right)^{17} \approx 0{,}00751695 < 0{,}01$.

À partir de l'étape 17, l'aire bleue représente moins de 1 % de l'aire initiale.

54 **1.a.** $c_0 = 3$; $l_0 = 1$; $p_0 = c_0 \times l_0 = 3 \times 1 = 3$.

b. $c_1 = 4 \times c_0 = 4 \times 3 = 12$; $l_1 = \frac{1}{3}l_0 = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$; $p_1 = c_1 \times l_1 = 12 \times \frac{1}{3} = 4$.

$c_2 = 4 \times c_1 = 4 \times 12 = 48$; $l_2 = \frac{1}{3}l_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$; $p_2 = c_2 \times l_2 = 48 \times \frac{1}{9} = \frac{16}{3}$.

2.a. D'une étape à la suivante, le nombre de côtés est multiplié par 4.

b. $c_{n+1} = 4 \times c_n$, (c_n) est une suite géométrique de premier terme 3 et de raison 4.

c. On a $c_n = 3 \times 4^n$.

3.a. D'une étape à la suivante, la longueur de chaque côté est divisée par 3.

b. $l_{n+1} = \frac{1}{3} \times l_n$; (l_n) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{3}$.

c. On a $l_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$.

4. $p_n = c_n \times l_n = 3 \times 4^n \times \frac{1}{3^n} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$; ainsi (p_n) est une suite géométrique de premier terme 3 et de raison $\frac{4}{3}$.

5.a. On a $c_{14} = 3 \times 4^{14} = 805\,306\,368 < 10^9$ et $c_{15} = 3\times4^{15} = 3\,221\,225\,472 > 10^9$.

Le polygone possède plus d'un milliard de côtés à partir de l'indice 15.

b. On a $p_{28} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{28} \approx 9\,449 < 10\,000$ et $p_{29} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{29} \approx 12\,599 > 10\,000$.

Le polygone a un périmètre supérieur à dix mille unités à partir de l'indice 29.

6. Quand n devient grand, les valeurs de c_n et p_n deviennent très grandes.

55 À partir de deux lentilles, il y aura chaque jour deux fois plus de lentilles dans la mare qu'à partir d'une lentille. Ainsi, chaque jour, la zone couverte par les lentilles est deux fois plus grande. Il faut donc un jour de moins, soit 29 jours, pour recouvrir la mare.

56 À chaque pliage, l'épaisseur de papier est doublée. Ainsi si on note e_n l'épaisseur de papier obtenue, en millimètres, au bout de n pliages, on a $e_0 = 0{,}1$ et pour tout entier n, $e_{n+1} = 2e_n$.

La suite (e_n) est donc géométrique de premier terme $e_0 = 0{,}1$ et de raison 2.

On a, pour tout entier n, $e_n = 0{,}1 \times 2^n$.

• Chercher le nombre de pliages nécessaires pour atteindre une épaisseur de 1 m = 1 000 mm revient à chercher n tel que $e_n \geq 1\,000$.

On a $e_{13} = 0{,}1\times2^{13} = 819{,}2 < 1\,000$ et $e_{14} = 0{,}1\times2^{14} = 1\,638{,}4 > 1\,000$.

Il faut 14 pliages pour atteindre une épaisseur qui dépasse 1 m.

• De même, chercher le nombre de pliages nécessaires pour atteindre une épaisseur de 1 km = 10^6 mm revient à chercher n tel que $e_n \geq 10^6$.

On a $e_{23} = 0{,}1 \times 2^{23} = 838\,860{,}8 < 10^6$ et $e_{24} = 0{,}1 \times 2^{24} = 1\,677\,721{,}6 > 10^6$.

Il faut 24 pliages pour atteindre une épaisseur qui dépasse 1 km.

• Chercher le nombre de pliages nécessaires pour atteindre une épaisseur de 149 597 870 km revient à chercher n tel que $e_n \geq 149\,597\,870 \times 10^6$, soit environ $e_n \geq 1{,}496 \times 10^{14}$.

On a $e_{50} \approx 1{,}126 \times 10^{14} < 1{,}496 \times 10^{14}$ et $e_{51} \approx 2{,}252 \times 10^{14} > 1{,}496 \times 10^{14}$.

Il faut 51 pliages pour atteindre une épaisseur qui dépasse la distance Terre-Soleil.

Automatismes

57 **1.** Les grandeurs représentées sont la pression atmosphérique en hectopascals (hPa) en fonction de l'altitude en mètres (m).

2. L'échelle est de 1 graduation pour 2 000 m en abscisse et 1 graduation pour 100 hPa en ordonnée.

3. a. La pression atmosphérique diminue lorsque l'altitude augmente.

b. Cette évolution est ralentie car la pente de la courbe est de moins en moins importante quand l'altitude augmente.

58 **1.** La pression atmosphérique est inférieure à 200 hPa à partir d'une altitude de 12 000 m environ.

2. La pression atmosphérique est supérieure à 700 hPa lorsque l'altitude est comprise entre 0 m et 3000 m environ.

59 1. Réponse c.

2. Réponse c.

3. Réponse c.

4. Réponse c.

60 $\frac{3}{15} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100}$, soit 20 %.

$\frac{21}{24} = \frac{7}{8}$ = 0,875, soit 87,5 %.

$\frac{24}{60} = \frac{4}{10} = \frac{40}{100}$, soit 40 %.

$\frac{54}{144} = \frac{27}{72} = \frac{3}{8}$ = 0,375, soit 37,5 %.

61 1. Le nombre de de vaches noires est 0,27 × 400, soit 108.

2. La proportion de victoires est $\frac{21}{30} = \frac{7}{10}$, soit 70 %.

3.a. Si les filles représentent 40 % des élèves de la classe, il y a 60% de garçons.

b. Si 8 filles représentent 40 % des élèves de la classe, 2 filles représentent 10 % des élèves. Il y a donc 20 élèves dans la classe et 0,6 × 20, soit 12 garçons dans la classe.

62 1. Si on note *p* le prix, en euros, du kilo de pêches avant l'augmentation, on a :

1,12 × p = 5,60, soit $p = \frac{5{,}60}{1{,}12} = 5$.

Avant l'augmentation, le prix des pêches était de 5 euros.

2. Si on note *p* le prix, en euros, du vélo avant les soldes, on a :
0,85 × p = 1 096,50, soit $p = \frac{1\,096{,}50}{0{,}85} = 1\,290$.

Avant les soldes, le prix du vélo était de 1 290 euros.

63 1. Faux : Si les ventes ont augmenté de 30 %, puis de 20 %, sur l'année, cela revient à multiplier ces ventes par 1,30, puis par 1,20, soit en tout par 1,3 × 1,2 = 1,56. Or un coefficient multiplicateur de 1,56 correspond à une augmentation globale de 56 %.

2. Vrai : Si le prix de l'ordinateur a augmenté de 25 %, puis baissé de 20 %, sur l'année, cela revient à multiplier ce prix par 1,25, puis par 0,8, soit en tout par 1,25 × 0,8 = 1.
Sur l'année, le prix de l'ordinateur est inchangé.

64 **a.** 1,2 + 3,7 + 6,3 + 0,8 = (1,2 + 0,8) + (3,7 + 6,3) = 2 + 10 = 12.

b. 12,3 – 10,7 – 6,3 + 4,7 = (12,3 – 6,3) + (4,7 – 10,7) = 6 + (–6) = 0.

c. 0,2×3,2 + 36 × 0,01 = 0,1 × 6,4 + 36 × 0,01 = 0,64 + 0,36 = 1.

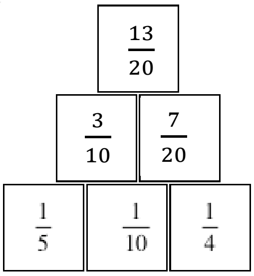
d. $0{,}25 \times 64 = \frac{1}{4} \times 64 = \frac{64}{4} = 16.$

65 **1.** 1 420,6 + 297,34 ≈ 1 420 + 300 ≈ 1 720 : **réponse c**.

2. 128,2 × 37,5 ≈ 130 × 40 ≈ 1 300 × 4 ≈ 5 200 : **réponse b**.

66 $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$ $\quad \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{2}{20} + \frac{5}{20} = \frac{7}{20}$ $\quad \frac{3}{10} + \frac{7}{20} = \frac{6}{20} + \frac{7}{20} = \frac{13}{20}$

D'où la pyramide :



67 Proportion restante : $1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{15}{15} - \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{4}{15}$.