Programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique

Sommaire

Préambule

Intentions majeures

La classe de seconde est conçue pour permettre aux élèves de consolider leur maitrise du socle commun de connaissances, de compétences et de culture afin de réussir la transition du collège au lycée. Elle les prépare à déterminer leur choix d'un parcours au sein du cycle terminal jusqu'au baccalauréat général ou technologique dans l'objectif d'une poursuite d'études supérieures réussie et, au-delà, de leur insertion professionnelle.

L'enseignement des mathématiques de la classe de seconde est conçu à partir des intentions suivantes :

- permettre à chaque élève, quel que soit son sexe, son origine sociale, de consolider les acquis du collège et une culture mathématique de base, de développer son gout des mathématiques, d'en apprécier les démarches et les objets afin qu'il puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques ainsi que de la simplification et de la généralisation que permet la maitrise de l'abstraction ;
- préparer au choix de l'orientation : choix de la spécialité mathématiques dans la voie générale, choix de la série dans la voie technologique ;
- assurer les bases mathématiques nécessaires à toutes les poursuites d'études.

Le programme de mathématiques définit un ensemble de connaissances et de compétences qui s'appuie sur le programme de collège, en réactivant les notions déjà étudiées et en y ajoutant un nombre raisonnable de nouvelles notions, à étudier de manière suffisamment approfondie.

Compétences mathématiques

Dans le prolongement des cycles précédents, six grandes compétences sont travaillées :
- **chercher**, expérimenter – en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- **modéliser**, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;
- **représenter**, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique, etc.), changer de registre ;
- **raisonner**, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- **calculer**, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- **communiquer** un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche.

La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences. Elle contribue à donner du sens aux notions étudiées. Elle doit faire l'objet d'un entrainement suffisamment régulier pour permettre aux élèves d'y accéder plus facilement en prenant conscience de certaines similitudes entre des situations différentes relevant d'une même démarche mathématique. Progressivement, l'élève procède par analogie en rattachant une situation particulière à une classe plus générale de problèmes ou en adaptant une méthode connue à la situation étudiée. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. Ceux-ci facilitent en effet le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique et élargissent le champ des démarches susceptibles d'être engagées. Le développement de ces automatismes ne se limite pas à un simple entrainement mécanique : il s'inscrit dans une progression pensée par l'enseignant, qui veille à donner du sens aux procédures, à identifier les invariants et à proposer des situations de réinvestissement régulier. Ces automatismes s'ancrent dans tous les domaines du programme. ~~L'acquisition~~ L'installation de ces réflexes est favorisée par la mise en place d'activités rituelles, notamment de calcul (mental ou réfléchi, numérique ou littéral). Elle est menée conjointement avec la résolution de problèmes motivants et substantiels, afin de stabiliser connaissances, méthodes et stratégies, et de trouver du plaisir à chercher.

Diversité de l'activité de l'élève

La mise en œuvre du programme doit permettre aux élèves d'acquérir des connaissances, des méthodes et des démarches spécifiques et d'en percevoir la construction mathématique.

La diversité des activités concerne aussi bien les contextes (internes aux mathématiques ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines) que les types de tâches proposées : exercices d'application et d'entrainement pour stabiliser et consolider les connaissances, exercices et problèmes favorisant les prises d'initiatives, mises au point collectives d'une solution, productions d'écrits individuels ou collectifs, « questions flash » pour favoriser l'acquisition d'automatismes, etc.

Il importe donc que cette diversité se retrouve dans les travaux proposés à la classe. Parmi ceux-ci, les travaux écrits faits hors du temps scolaire permettent, à travers l'autonomie laissée à chacun, le développement des qualités de prise d'initiative ou de communication ainsi que la stabilisation des connaissances et des méthodes étudiées. Ils doivent être conçus de façon à prendre en compte la diversité des élèves. ~~Le calcul est un outil essentiel pour la résolution de problèmes. Il est important en classe de seconde de poursuivre l'acquisition d'automatismes initiée au collège. L'installation de ces automatismes est favorisée par la mise en place d'activités rituelles, notamment de calcul (mental ou réfléchi, numérique ou littéral). Elle est menée conjointement avec la résolution de problèmes motivants et substantiels, afin de stabiliser connaissances, méthodes et stratégies.~~

Utilisation de logiciels

L'utilisation de logiciels (calculatrice ou ordinateur), d'outils de visualisation et de représentation, de calcul (numérique ou formel), de simulation, de programmation développe la possibilité d'expérimenter, ouvre largement le dialogue entre l'observation et la démonstration et change profondément la nature de l'enseignement.

L'utilisation régulière de ces outils peut intervenir selon trois modalités :
- par les professeurs, en classe, avec un dispositif de visualisation collective adapté ;
- par les élèves, en classe, à l'occasion de la résolution d'exercices ou de problèmes ;
- dans le cadre du travail personnel des élèves hors du temps de classe (par exemple au CDI ou à un autre point d'accès au réseau local).

Évaluation des élèves

~~Les élèves sont évalués en fonction des capacités attendues et selon des modalités variées : devoir surveillé avec ou sans calculatrice, devoir en temps libre, rédaction de travaux de recherche, individuels ou collectifs, compte rendu de travaux pratiques pouvant s'appuyer sur des logiciels, exposé oral d'une solution. L'évaluation doit permettre de repérer les acquis des élèves en lien avec les six compétences mathématiques : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.~~

L'évaluation joue un rôle clé dans la régulation des apprentissages, tant pour l'enseignant que pour l'élève, pour lequel elle participe pleinement au développement de son autonomie et à son engagement dans les apprentissages. Elle revêt différentes modalités mais conserve toujours une visée formative ; pour cela, les élèves sont informés en amont des éléments évalués.

L'évaluation doit permettre de repérer les acquis des élèves en lien avec les six compétences mathématiques : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

L'évaluation doit faire prendre conscience des réussites et des progrès. Le retour sur l'évaluation est un moment clé du processus d'apprentissage. Il ne se limite pas à une correction collective, mais vise à valoriser les démarches pertinentes, même si elles ne mènent pas immédiatement à la bonne réponse, mettre en lumière les erreurs fréquentes, pour aider les élèves à les comprendre et à y remédier, proposer des pistes de progrès aux élèves. Ce retour permet aussi à l'enseignant de réguler sa progression, de revoir certains points du programme ou de proposer d'autres approches pédagogiques.

Place de l'oral

Les étapes de verbalisation et de reformulation jouent un rôle majeur dans l'appropriation des notions mathématiques et la résolution des problèmes. Comme toutes les disciplines, les mathématiques contribuent au développement des compétences orales, notamment à travers la pratique de l'argumentation. Celle-ci conduit à préciser sa pensée et à expliciter son raisonnement de manière à convaincre. Elle permet à chacun de faire évoluer sa pensée, jusqu'à la remettre en cause si nécessaire, pour accéder progressivement à la vérité par la preuve. Des situations variées se prêtent à la pratique de l'oral en mathématiques : la reformulation par l'élève d'un énoncé ou d'une démarche, les échanges interactifs lors de la construction du cours, les mises en commun après un temps de recherche, les corrections d'exercices, les travaux de groupe, les exposés individuels ou à plusieurs… L'oral mathématique mobilise à la fois le langage naturel et le langage symbolique dans ses différents registres (graphiques, formules, calcul).

Trace écrite

Disposer d'une trace de cours claire, explicite et structurée est une aide essentielle à l'apprentissage des mathématiques. Faisant suite aux étapes importantes de recherche, d'appropriation individuelle ou collective, la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les méthodes et les stratégies étudiées en classe. Explicitant les liens entre les différentes notions ainsi que leurs objectifs, éventuellement enrichie par des exemples ou des schémas, elle constitue pour l'élève une véritable référence vers laquelle il peut se tourner autant que de besoin. Sa consultation régulière (notamment au moment de la recherche d'exercices et de problèmes, sous la conduite des professeurs ou en autonomie) favorise à la fois la mémorisation et le développement de compétences. Les professeurs doivent avoir le souci de la bonne qualité (mathématique et rédactionnelle) des traces écrites figurant au tableau et dans les cahiers d'élèves. En particulier, il est essentiel de bien distinguer le statut des énoncés (conjecture, définition, propriété - admise ou démontrée -, démonstration, théorème).

Travail personnel des élèves

Si la classe est le lieu privilégié pour la mise en activité mathématique des élèves, les travaux hors du temps scolaire sont indispensables pour consolider les apprentissages. Fréquents, de longueur raisonnable et de nature variée, ces travaux sont essentiels à la formation des élèves. Individuels ou en groupe, évalués à l'écrit ou à l'oral, ces travaux sont conçus de façon à prendre en compte la diversité des élèves et permettent le développement des qualités d'initiatives, tout en assurant la stabilisation des connaissances et des compétences. Ils peuvent être proposés pour approfondir, réviser ou remédier. Ces travaux doivent avoir des objectifs explicites, être adaptés au niveau des élèves, et prendre en compte la diversité de leurs besoins. Ils doivent faire l'objet d'un retour individualisé par les professeurs.

Les professeurs précisent le cadre et les modalités d'usage des outils d'intelligence artificielle dans le travail personnel des élèves.

Quelques lignes directrices pour l'enseignement

Les professeurs veillent à créer, dans la classe de mathématiques, une atmosphère de travail favorable aux apprentissages, combinant bienveillance et exigence. Il est important de développer chez chaque élève des attitudes positives à l'égard des mathématiques et sa capacité à résoudre des problèmes stimulants.

Il est important d'encourager chaque élève, fille ou garçon, à s'engager dans une recherche mathématique, individuellement ou en équipe, développant ainsi confiance en soi et sentiment d'efficacité personnelle. L'élève cherche, essaie des pistes, prend le risque de se tromper, sans craindre l'erreur, mais en en tirant profit grâce aux professeurs, qui l'aident à l'identifier, à l'analyser et la comprendre. Ce travail sur l'erreur participe à la construction de ses apprentissages.

Les problèmes proposés aux élèves contribuent à donner du sens aux notions étudiées. Ils peuvent être internes aux mathématiques, provenir de l'histoire des mathématiques, être issus des autres disciplines ou du monde réel, en prenant garde que la simple inclusion de références au monde réel ne suffit pas toujours à transformer un exercice de routine en un bon problème. Dans tous les cas, ils doivent être bien conçus et motivants, afin de développer les connaissances et compétences mathématiques du programme et susciter des vocations scientifiques.

Les professeurs veillent à établir un équilibre entre divers temps de l'apprentissage :
- les temps de recherche, d'activité, de manipulation ;
- les temps de dialogue et d'échange, de verbalisation ;
- les temps de cours, où les professeurs exposent avec précision, présentent certaines démonstrations et permettent aux élèves d'accéder à l'abstraction ;
- les temps où sont présentés et discutés des exemples, pour vérifier la bonne compréhension de tous les élèves ;
- les exercices et problèmes, allant progressivement de l'application la plus directe au thème d'étude ;
- les rituels, afin de consolider les connaissances et les méthodes.

Organisation du programme

Le programme s'organise en ~~cinq~~ quatre ~~grandes~~ parties thématiques : « Nombres et calculs, algèbre », « Géométrie », « Fonctions », « Statistiques et probabilités », et trois parties transversales : « Vocabulaire ensembliste et logique », « Algorithmique et programmation » et « Automatismes ». Cette ~~découpage~~ organisation n'est cependant pas un plan de cours : il est essentiel d'exploiter les interactions entre les différentes parties, qu'elles soient thématiques ou transversales, en adoptant un enseignement en spirale.

Les parties transversales recensent les connaissances et capacités attendues qui doivent être travaillées tout au long de l'année. Elles ne donnent pas lieu à des séquences de cours spécifiques mais font cependant l'objet d'un enseignement explicite.

Les connaissances du collège sont systématiquement réactivées à travers des problèmes. Elles n'ont pas vocation à faire l'objet de chapitres de révisions. Le travail sur les automatismes favorise leur réactivation.

Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, mettant en œuvre des types de raisonnement divers, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par les professeurs, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc.

Le programme propose un certain nombre d'approfondissements possibles, mais en aucun cas obligatoires. Ils peuvent permettre une différenciation pédagogique.

Il peut être judicieux d'éclairer le cours par des éléments de contextualisation d'ordre historique, épistémologique ou culturel. L'histoire peut aussi être envisagée comme une source féconde de problèmes clarifiant le sens de certaines notions. Les items « Histoire des mathématiques » identifient quelques possibilités en ce sens. Pour les étayer, les professeurs peuvent s'appuyer sur l'étude de documents historiques.

Programme

Vocabulaire ensembliste et logique

L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation.

Les élèves doivent connaitre les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'ensemble vide, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondants : $\emptyset$, $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, $\{\ldots\}$, ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils rencontrent également la notion de couple et celle de produit cartésien de deux ensembles.

Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E, on utilise la notation $\bar{A}$ des probabilités, ou la notation $E \setminus A$. On utilise la notation Card(A) pour le cardinal (nombre d'éléments) d'un ensemble fini A.

Les élèves apprennent en situation à :
- reconnaitre ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs) ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication, la contraposée ;
- lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ sont hors programme).

Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas et par l'absurde.

Algorithmique et programmation

La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique. Au cycle 4, en mathématiques et en technologie, les élèves ont appris à écrire, mettre au point et exécuter un programme simple. Une consolidation des acquis du cycle 4 est proposée autour de deux idées essentielles :
- la notion de fonction ;
- la programmation comme production d'un texte dans un langage informatique.

Dans le cadre de cette activité, les élèves s'exercent à :
- décrire des algorithmes en langage naturel ou dans un langage de programmation ;
- en réaliser quelques-uns à l'aide d'un programme simple écrit dans un langage de programmation textuel ;
- interpréter, compléter ou modifier des algorithmes plus complexes.

Un langage de programmation simple d'usage est nécessaire pour l'écriture des programmes informatiques. Le langage choisi est Python, langage interprété, concis, largement répandu et pouvant fonctionner dans une diversité d'environnements. Les élèves sont entrainés à passer du langage naturel à Python et inversement.

L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes ainsi traités doivent être en relation avec les autres parties du programme (fonctions, géométrie, statistiques et probabilité, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante.

À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de petits programmes, il convient de transmettre aux élèves l'exigence d'exactitude et de rigueur, et de les entrainer aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle. En programmant, les élèves revisitent les notions de variables et de fonctions sous une forme différente.

Histoire des mathématiques

Les textes évoqués dans la thématique « Nombres et calculs » indiquent une préoccupation algorithmique tout au long de l'Histoire. Lorsqu'un texte historique a une visée algorithmique, transformer les méthodes qu'il présente en un algorithme, voire en un programme, ou inversement, est l'occasion de travailler des changements de registre qui donnent du sens au formalisme mathématique.

~~Utiliser les variables comme instructions élémentaires~~ Variables et instructions élémentaires

Contenus

- Variables informatiques de type entier, booléen, flottant, chaine de caractères.
- Affectation (notée ← en langage naturel).
- Séquence d'instructions.
- Instruction conditionnelle.
- Boucle bornée (for), boucle non bornée (while).

Capacités attendues

- Choisir ou déterminer le type d'une variable (entier, flottant ou chaine de caractères).
- Concevoir et écrire une instruction d'affectation, une séquence d'instructions, une instruction conditionnelle.
- Écrire une formule permettant un calcul combinant des variables.
- Programmer, dans des cas simples, une boucle bornée, une boucle non bornée.
- Dans des cas plus complexes : lire, comprendre, modifier ou compléter un algorithme ou un programme.

Notion de fonction

Contenus

- Fonctions à un ou plusieurs arguments.
- Fonction renvoyant un nombre aléatoire. Série statistique obtenue par la répétition de l'appel d'une telle fonction.

Capacités attendues

- Écrire des fonctions simples ; lire, comprendre, modifier, compléter des fonctions plus complexes. Appeler une fonction.
- Lire et comprendre une fonction renvoyant une moyenne, un écart type. Aucune connaissance sur les listes n'est exigée.
- Écrire des fonctions renvoyant le résultat numérique d'une expérience aléatoire, d'une répétition d'expériences aléatoires indépendantes.

Automatismes

Cette partie du programme vise à construire et à entretenir des habiletés dans les domaines du calcul, de l'information chiffrée et des représentations graphiques. Il s'agit d'automatiser le recours à des connaissances, des procédures, des méthodes et des stratégies. Leur acquisition permet aux élèves une meilleure réussite dans l'apprentissage des mathématiques, participe du développement de leur esprit critique par une meilleure maitrise des nombres et du calcul et leur permet une meilleure lecture et compréhension des représentations de données dont les graphiques.

Les capacités attendues énoncées ci-dessous n'ont pas vocation à faire l'objet d'un chapitre d'enseignement spécifique car les notions qui les sous-tendent ont été travaillées dans les classes antérieures et doivent être entretenues et consolidées au cours de l'année. Cependant les nouvelles notions du programme peuvent donner lieu également à un travail d'automatisation tout le long de l'année. Elles relèvent d'un entrainement régulier privilégiant l'activité mentale. Les différents thèmes proposés doivent être travaillés tout au long de l'année et la présentation par blocs thématiques ne signifie pas, bien au contraire, qu'il faille les aborder les uns après les autres. Les modalités de mise en œuvre peuvent être variées et prendre appui sur différents supports : à l'oral, à l'écrit, individuellement ou en groupe, utilisant éventuellement des outils numériques de vidéo-projection, de recensement instantané des réponses, etc.

Calcul numérique et algébrique

- Comparer deux nombres directement ou par calcul :
  - de leur différence ;
  - s'ils sont strictement positifs, de leur quotient.
- Effectuer des opérations et des comparaisons entre des fractions simples.
- Effectuer des opérations sur les puissances.
- Passer d'une écriture d'un nombre à une autre (décimale, fractionnaire, pourcentage).
- Estimer un ordre de grandeur.
- S'assurer de la vraisemblance, de la cohérence d'un résultat.
- Effectuer des conversions d'unités : longueurs, aires, volumes, contenances, durées, vitesses, masses.
- Effectuer un calcul littéral élémentaire :
  - expressions additives : – (a + b) = –a – b, – (a – b) = b – a ;
  - expressions multiplicatives : $x = 1 \times x, x = \frac{1}{x}, (-1) \times a = \frac{a}{-1} = -a$;

    $0 = 0x, \frac{0}{a} = 0, \frac{x}{a} = \frac{1}{a}x, \frac{ab}{c} = a \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \times b$;

    $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a, \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}, \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$;
- Développer, factoriser, réduire une expression algébrique simple :
  - identités (factorisation et développement) : $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$;

- factorisation de $ax^2 + bx$, $ax + bx$.

- Résoudre une équation du type : $x^2 = a$, $ax + b = cx + d$ ou $\frac{a}{x} = b$ ou une inéquation du premier degré.
- Isoler une variable dans une égalité qui en comporte plusieurs, sur des exemples internes aux mathématiques ou issus des autres disciplines.
- Effectuer une application numérique d'une formule (notamment pour les formules utilisées dans les autres disciplines).

Proportions et pourcentages

- Calculer, appliquer, exprimer une proportion sous différentes formes (décimale, fractionnaire, pourcentage).
- Utiliser une proportion pour calculer une partie connaissant le tout, ou le tout connaissant une partie.

Évolutions et variations

- Passer d'une formulation additive (« augmenter de 5 % », respectivement « diminuer de 5 % ») à une formulation multiplicative (« multiplier par 1,05 », respectivement « multiplier par 0,95 »).

Fonctions et représentations

- Déterminer graphiquement des images et des antécédents.
- Exploiter une équation de courbe (appartenance d'un point, calcul de coordonnées).
- Reconnaitre l'expression d'une fonction linéaire, d'une fonction affine, savoir que leur représentation graphique est une droite.

Géométrie

- Sur une droite graduée, repérer ou placer un point dont l'abscisse est un nombre relatif.
- Dans le plan muni d'un repère orthogonal, lire les coordonnées d'un point donné, placer un point de coordonnées données.
- Calculer des périmètres (polygone et cercle), aires (rectangle, triangle et disque) et des volumes (pavé droit, prisme, cylindre, pyramide, cône et boule).
- Application simple du théorème de Pythagore, du théorème de Thalès
- Connaitre et utiliser les lignes trigonométriques dans le triangle rectangle : cosinus, sinus, tangente.

Statistiques

Les contextes sont issus des mathématiques, des autres disciplines ou de la vie réelle.

- Lire et commenter des graphiques usuels :
  - diagramme en barres ;
  - diagramme circulaire, semi-circulaire ;
  - courbe, nuage de points (diagramme cartésien).

- Calculer et interpréter des indicateurs statistiques (moyenne, médiane, quartiles) pour une série statistique (selon la façon dont elle est présentée : données brutes, données regroupées par classes, représentations graphiques).
- Comparer des distributions à l'aide de boites à moustaches.

Probabilités

- Savoir qu'une probabilité est un nombre entre 0 et 1.
- Savoir calculer la probabilité de l'évènement contraire.
- Calculer la probabilité d'un évènement comme somme des probabilités des issues qui le composent.
- Utiliser la relation $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ dans le cas de l'équiprobabilité.

Nombres et calculs, algèbre

Objectif

Cette partie prolonge le thème « Nombres et calculs » du cycle 4. Elle a pour objectifs ~~de~~:
- d'approfondir la connaissance des divers types et ensembles de nombres ;
- de développer la pratique du calcul numérique ou algébrique ;
- de travailler sur les inégalités ;
- de résoudre des problèmes modélisés par des équations ou inéquations se ramenant au premier degré.

Les élèves rencontrent les nombres réels comme abscisses des points d'une droite graduée, et plus largement comme nombres permettant de mesurer des grandeurs. Ils les comparent, ils apprennent qu'il existe des nombres irrationnels, les encadrent par des nombres décimaux ou rationnels. Ils comprennent que calculatrices et logiciels font des calculs approchés. En liaison avec un approfondissement de l'étude des multiples et diviseurs, ils consolident la pratique du calcul sur les fractions.

La mise en évidence de la puissance du calcul littéral comme outil de résolution de problème, déjà rencontrée au collège, reste un objectif important. L'élève doit être confronté à des situations, internes ou externes aux mathématiques, dans lesquelles une modélisation est nécessaire, faisant intervenir variables, expressions algébriques, équations ou inéquations. Les situations internes sont l'occasion de réactiver les connaissances du collège, notamment ~~sur les thèmes "Espace et géométrie" et "Grandeurs et mesures"~~ en géométrie (longueurs, aires, volumes, angles, vitesses).

Il convient d'équilibrer la formation, d'une part en proposant des applications variées et significatives des notions et techniques étudiées, d'autre part, en veillant à l'acquisition des automatismes, par la pratique fréquente de calculs routiniers. ~~On réactivera~~

~~notamment les formes décimales exactes de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ et des fractions $\frac{k}{5}$ pour k dans {1,2,3,4}, et arrondies de $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.~~

Histoire des mathématiques

La notion apparemment familière de nombre ne va pas de soi. Deux exemples : la crise provoquée par la découverte des irrationnels chez les mathématiciens grecs, la différence entre « nombres réels » et « nombres de la calculatrice ». Il s'agit également de souligner le gain en efficacité et en généralité qu'apporte le calcul littéral, en expliquant qu'une grande partie des mathématiques n'a pu se développer qu'au fur et à mesure de l'élaboration, au cours des siècles, de symbolismes efficaces. Il est possible d'étudier des textes anciens d'auteurs tels que Diophante, Euclide, Al-Khwarizmi, Fibonacci, Viète, Fermat, Descartes et mettre en évidence leurs aspects algorithmiques.

Arithmétique

Contenus

- Notations $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
- Définition des notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair : a est multiple de b s'il existe un entier k tel que a = kb.

Capacités attendues

- Modéliser et résoudre des problèmes mobilisant les notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair.
- Présenter les fractions sous forme irréductible.

Démonstrations

- Pour une valeur numérique de a, la somme de deux multiples de a est multiple de a.
- Le carré d'un nombre impair est impair.

Exemples d'algorithme

- Déterminer si un entier naturel a est multiple d'un entier naturel b.
- Pour des entiers a et b donnés, déterminer le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b.

~~Manipuler les~~ Nombres réels

Au cycle 4, les élèves ont étudié les inégalités pour comparer des valeurs numériques. Ils ont résolu des équations et des inéquations du premier degré. La notion d'intervalle, présentée comme ensemble de nombres vérifiant des inégalités, est nouvelle. Elle prolonge le travail mené au cycle 4 sur les inéquations.

La notation de la valeur absolue est introduite pour exprimer la distance entre deux nombres réels et caractériser les intervalles de centre donné. Toute autre utilisation est hors programme.

Contenus

- Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, droite numérique.
- Intervalles de $\mathbb{R}$. Représentation graphique, notations du type [a, +∞[,] −∞, a], [a, b], etc. ~~Notations + ∞ et − ∞.~~
- Notation en valeur absolue |a| pour la distance de a à 0. Distance entre deux nombres réels.
- ~~Représentation de l'intervalle [a − r , a + r] puis caractérisation par la condition |x − a| ⩽ r.~~
- Inéquation du type $|x - a| \leqslant$ r. Représentation graphique des solutions, intervalle [a − r, a + r].
- Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près.
- Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple $\sqrt{2}$ et π.

Capacités attendues

- Lire l'abscisse d'un nombre réel sur une droite graduée et placer un nombre réel d'abscisse donnée.
- ~~Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.~~
- Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.
- Donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.
- Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.

Démonstrations

- Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.
- Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exemple d'algorithme

- Déterminer par balayage un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-n}.

Approfondissements possibles

- Développement décimal illimité d'un nombre réel.
- Observation, sur des exemples, de la périodicité du développement décimal de nombres rationnels~~, du fait qu'un développement décimal périodique correspond à un rationnel.~~

~~Utiliser les notions de multiple, diviseur et de nombre premier~~

~~*Contenus*~~

- ~~Notations $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.~~
- ~~Définition des notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair.~~

~~*Capacités attendues*~~

- ~~Modéliser et résoudre des problèmes mobilisant les notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair, de nombre premier.~~
- ~~Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible.~~

~~*Démonstrations*~~

- ~~Pour une valeur numérique de *a*, la somme de deux multiples de *a* est multiple de *a*.~~
- ~~Le carré d'un nombre impair est impair.~~

~~*Exemples d'algorithme*~~

- ~~Déterminer si un entier naturel *a* est multiple d'un entier naturel *b*.~~
- ~~Pour des entiers *a* et *b* donnés, déterminer le plus grand multiple de *a* inférieur ou égal à *b*.~~
- ~~Déterminer si un entier naturel est premier.~~

~~Utiliser le calcul littéral~~ Algèbre

Contenus

- Règles de calcul sur les puissances entières relatives, sur les racines carrées. Relation $\sqrt{a^2} = |a|$.
- ~~Identités $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, à savoir utiliser dans les deux sens.~~
- Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.
- Somme d'inégalités. Produit d'une inégalité par un réel positif, négatif, en liaison avec le sens de variation d'une fonction affine.
- ~~Ensemble des solutions d'une équation, d'une inéquation.~~
- Comparaison additive (par différence), comparaison multiplicative (par rapport, pour deux nombres strictement positifs).
- Ensemble des solutions des équations du type $ax + b = 0$, et des inéquations de la forme $ax + b > 0$.
- Équation de la forme $A(x)B(x) = 0$ (équation produit nul).
- En liaison avec la section « Fonctions », étude du signe des expressions de la forme $A(x)B(x)$ et $\frac{A(x)}{B(x)}$.
- Équation $\frac{A(x)}{B(x)} = k$ (équation quotient) en lien avec l'ensemble de définition d'une expression.

Capacités attendues

- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- Sur des cas simples de relations entre variables (par exemple $U = RI$, $d = vt$, $S = \pi r^2$, $V = abc$, $V = \pi r^2 h$, exprimer une variable en fonction des autres. Cas d'une relation du premier degré $ax + by = c$.
- Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.
- Comparer deux quantités en utilisant leur différence, ou leur ~~quotient~~ rapport (ratio) dans le cas ~~positif~~ de quantités positives. Interpréter, selon le contexte, cette comparaison en termes de variation additive ou multiplicative.
- Modéliser un problème par une inéquation.
- Donner l'ensemble des solutions d'une équation du premier degré du type $ax = b$, $a + x = b$, $ax + b = cx + d$, d'une inéquation du premier degré du type $a \geqslant b$, $a + x \geqslant b$, $ax + b \geqslant cx + d$, d'une équation du type $x^2 = a$.

Démonstrations

- Quels que soient les réels positifs a et b, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- ~~Si *a* et *b* sont des réels strictement positifs, . $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.~~
- ~~Pour *a* et *b* réels positifs, illustration géométrique de l'égalité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.~~

Exemple d'algorithme

- Déterminer la première puissance d'un nombre positif donné supérieure ou inférieure à une valeur donnée.

Approfondissements possibles

- Développement de $(a + b + c)^2$.
- Développement de $(a + b)^3$.
- Inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique de deux réels strictement positifs.

Géométrie

Objectifs

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- consolider les notions sur les configurations géométriques abordées au collège et prolonger leur étude ;
- ~~introduire~~ poursuivre le travail mené sur les vecteurs du plan comme outil permettant d'étudier des problèmes issus des mathématiques et des autres disciplines, en particulier de la physique ;
- poursuivre l'étude de la géométrie repérée, qui relie nombres, calculs algébriques, fonctions et géométrie et constitue un outil utile à d'autres disciplines. En particulier, introduire la notion d'ensemble de points du plan décrit par une équation,

en explicitant le cas des équations de droites.

Les élèves ont découvert les vecteurs ~~qui sont~~ au cycle 4, ce qui leur permet de les mobiliser dès la classe de seconde comme un outil efficace pour démontrer en géométrie et modéliser en physique. Ils les manipulent dans le plan muni d'un repère ~~orthonormé~~ orthogonal. Ils approfondissent leurs connaissances sur les configurations du plan, disposent de nouveaux outils pour analyser des figures géométriques, résoudre des problèmes. Ils étudient les équations de droite, font le lien entre représentations géométrique, algébrique, et fonctionnelle.

La géométrie développe des capacités de représentation. Il importe de s'appuyer sur des figures, selon des modalités diverses (tracé à main levée, schéma, figure soignée, utilisation de logiciels). Dans le cadre de la résolution de problèmes, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique par les élèves leur donne une plus grande autonomie et encourage leur prise d'initiative.

Le programme se place dans le cadre de la géométrie plane. Cependant, les professeurs peuvent proposer des activités mobilisant les notions de géométrie dans l'espace vues au collège (sections, aires, volumes) enrichies de celles étudiées en seconde (vecteurs).

Il convient de mettre en valeur l'intervention de la géométrie dans les autres parties du programme, notamment « Nombres et calculs » et « Fonctions ».

Histoire des mathématiques

Les progrès apportés par la « méthode des coordonnées » de Descartes, puis par la notion de vecteur, permettent de relier efficacement géométrie, physique et calcul.

On pourra évoquer les mathématiques grecques, en mettant en évidence le rôle central de la géométrie dans la naissance de l'idée de démonstration ainsi que le faible développement de l'algèbre sous l'Antiquité, en partie dû à l'appui systématique sur la géométrie.

~~Manipuler les vecteurs du plan~~ Vecteurs et problèmes de géométrie

Au cycle 4, ~~la~~ les notions de vecteur et de translation ~~fait~~ font l'objet d'une première approche~~, fondée sur l'observation de son effet sur les configurations planes et de manipulations diverses, notamment sur un quadrillage ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. On s'y appuie en seconde pour introduire la notion de vecteur~~. La somme de vecteurs est vue en lien avec l'enchainement de deux translations et la relation de Chasles est ainsi abordée en classe de troisième.

Les professeurs peuvent définir les opérations vectorielles à partir des coordonnées, ou bien commencer par leur construction géométrique. Dans tous les cas, la relation $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ est mise en évidence. ~~La relation de Chasles est introduite pour illustrer l'addition des vecteurs, mais ne fait pas l'objet d'un travail spécifique.~~

La caractérisation vectorielle du milieu d'un segment donne l'occasion de travailler le calcul vectoriel ; elle prolonge et entretien les connaissances du cycle 4.

Les problèmes de géométrie sont l'occasion de mettre en avant l'efficacité de l'outil vectoriel.

En liaison avec les autres disciplines, on signale que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être appelé vecteur déplacement de A à B que, si O est choisi comme origine du plan, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ peut être appelé vecteur position de M (relativement à O).

Contenus

- ~~Vecteur $\overrightarrow{MM'}$ associé à la translation qui transforme M en M'. Direction, sens et norme.~~
- Égalité de deux vecteurs. Notation $\vec{u}$.Vecteur nul.
- ~~Somme de deux vecteurs en lien avec l'enchaînement des translations. Relation de Chasles.~~
- Représentants d'un vecteur.
- Produit d'un vecteur par un nombre réel. Colinéarité de deux vecteurs.
- Représentation d'un vecteur comme combinaison de deux vecteurs non colinéaires.
- Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
- Expression des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et de B.
- Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme.
- Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment

Capacités attendues

- ~~Représenter géométriquement des vecteurs.~~
- ~~Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.~~
- Représenter la somme de deux vecteurs à partir de représentants de même origine.
- Représenter un vecteur dont on connait les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
- Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
- Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.
- Résoudre des problèmes avec des méthodes diverses (méthodes vectorielles, repérées ou non, méthodes géométriques).

Démonstration

- ~~Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.~~
- Caractérisations de la colinéarité de deux vecteurs non nuls : nullité du déterminant ; proportionnalité des coordonnées.

Approfondissements possibles

- ~~Définition vectorielle des homothéties~~
- Barycentre de deux ou trois points.
- Formule permettant le calcul des coordonnées du milieu d'un segment.
- Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
- Expression de l'aire d'un triangle : $\frac{1}{2}ab \sin C$.
- Démontrer que l'isobarycentre de trois points non alignés est l'intersection des médianes.
- Démontrer que le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit.

~~Résoudre des problèmes de géométrie~~

~~Contenus~~

- ~~Projeté orthogonal d'un point sur une droite.~~

~~Capacités attendues~~

- ~~Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles).~~
- ~~Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes.~~
- ~~Traiter de problèmes d'optimisation.~~

~~Démonstrations~~

- ~~Le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M.~~
- ~~Relation trigonométrique $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ dans un triangle rectangle.~~

~~Approfondissements possibles~~

- ~~Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.~~
- ~~Expression de l'aire d'un triangle : $\frac{1}{2}ab \sin C$.~~
- ~~Formule d'Al-Kashi.~~
- ~~Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit.~~

~~Représenter et caractériser les~~ Droites du plan

Au cycle 4, les élèves ont rencontré ~~les équations de~~ les droites ~~pour représenter les~~ au travers des représentations graphiques des fonctions affines. En seconde, ils ~~étendent l'étude à la forme générale des~~ étudient les équations de droite.

Contenus

- Vecteur directeur d'une droite.
- Équation de droite : équation cartésienne, équation réduite.
- Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Capacités attendues

- Déterminer une équation de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur ou un point et la pente.
- Déterminer la pente ou un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.
- Tracer une droite connaissant son équation cartésienne ou réduite.
- Établir que trois points sont alignés ou non.
- Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.
- ~~Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues~~, Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes données par leur équation réduite.

Démonstration

- En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

Exemples d'algorithme

- Étudier l'alignement de trois points dans le plan.
- Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés.

Approfondissements possibles

- Ensemble des points équidistants d'un point et de l'axe des abscisses.
- Représentation, sur des exemples, de parties du plan décrites par des inégalités sur les coordonnées.

Fonctions

Objectifs

Au cycle 4, les élèves ont découvert progressivement la notion de fonction, manipulé différents modes de représentation : expression algébrique, tableau de valeurs, représentation graphique, programmes de calcul. Ils connaissent le vocabulaire de base : variable, fonction, antécédent, image et la notation $f(x)$. Selon le mode de représentation choisi, ils déterminent une image ou des antécédents d'un nombre par une fonction. Ils ont étudié les fonctions linéaires, les fonctions affines et leur représentation graphique.

En seconde, les objectifs sont les suivants :

- consolider la notion de fonction, comme exprimant la dépendance d'une variable par rapport à une autre ;
- exploiter divers registres, notamment le registre algébrique et le registre graphique ;
- étendre la panoplie des fonctions de référence ;
- étudier les notions ~~liées aux~~ de variations et ~~aux~~ d'extrémums des fonctions.

Les fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ permettent de modéliser des phénomènes continus. On peut confronter les élèves à des exemples de fonctions définies sur $\mathbb{N}$ pour modéliser des phénomènes discrets. La notation $u(n)$ est alors utilisée.

La modélisation d'une dépendance par une fonction apparait dans des domaines très variés : géométrie dans le plan ~~ou dans l'espace,~~ biologie, économie, physique, sciences sociales. La modélisation de phénomènes dépendant du temps, la variable étant alors notée t est mise en évidence : chute libre d'un corps, loi de l'offre et de la demande, respiration des cellules, fermentation, photosynthèse en SVT.

Les outils numériques sont mis à profit :
- un logiciel de géométrie dynamique, pour la représentation graphique et l'utilisation de curseurs ;
- Python, le tableur ou la calculatrice, pour mettre en évidence l'aspect de programme de calcul.

Les élèves doivent se constituer un répertoire d'images mentales des courbes représentatives des fonctions de référence, sur lesquelles s'appuyer lors de l'étude des propriétés des fonctions.

~~Dans un premier temps, les élèves découvrent, manipulent et verbalisent certaines propriétés (parité, monotonie sur un intervalle…) sur les fonctions de référence. Ces propriétés se généralisent peu à peu aux fonctions quelconques. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année. Leur formalisation est l'occasion d'un travail sur les quantificateurs~~

L'étude de chaque fonction de référence intervient au moment le plus opportun en fonction de la progression choisie par l'enseignant et de l'articulation avec les autres notions enseignées dans le programme.

Histoire des mathématiques

On peut évoquer la très lente élaboration de la notion de fonction, depuis l'Antiquité jusqu'à la codification actuelle par Dirichlet, en mettant en évidence quelques étapes importantes : Newton, Leibniz, Euler. On souligne alors l'importance de la notation algébrique.

~~Se constituer un répertoire de fonctions de référence~~

~~Les élèves doivent se constituer un répertoire d'images mentales des courbes représentatives des fonctions de référence, sur lesquelles s'appuyer lors de l'étude des propriétés des fonctions.~~

~~*Contenus*~~

- ~~Fonction carré, inverse, racine carrée, cube : définitions et courbes représentatives.~~

~~*Capacités attendues*~~

- ~~Pour deux nombres *a* et *b* donnés et une fonction de référence f, comparer *f(a)* et *f(b)* numériquement ou graphiquement.~~
- ~~Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type *f(x) = k*, *f(x) < k*.~~

~~*Démonstration*~~

- ~~Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geqslant 0$.~~

~~Représenter algébriquement et graphiquement les fonctions~~ Représentation algébrique et graphique des fonctions

Dans cette section, les fonctions peuvent être données par leur représentation graphique, par des expressions algébriques ou des programmes de calcul, par des tableaux de valeurs.

Contenus

- Fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$.
- Recherche de domaine d'étude (ensemble de définition).
- Courbe représentative : la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $y = f(x)$.
- ~~Fonction paire, impaire. Traduction géométrique~~
- Signe d'une fonction affine et des fonctions de référence.
- Tableau de signes pour une fonction produit ou quotient.

Capacités attendues

- Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines ou de la vie courante ou citoyenne.
- Fonctions valeur absolue, carré, inverse : définitions et courbes représentatives.
- Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = \mathrm{k}$, $f(x) < \mathrm{k}$, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.
- ~~Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes.~~
- Résoudre une équation ou une inéquation de la forme $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ à l'aide d'un tableau de signes, lorsque f est un

produit ou un quotient.
- Résoudre, graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une équation ou inéquation du type $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.
- Pour les fonctions affines, valeur absolue, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$.

~~*Approfondissement possible*~~

- ~~Étudier la parité d'une fonction dans des cas simples.~~

~~Etudier les~~ Variations et ~~les~~ extrémums d'une fonction

Contenus

- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations.
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
- ~~Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.~~
- ~~Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube.~~
- Pour une fonction affine donnée par $f(x) = mx + p$, interprétation de m comme taux d'accroissement et de p comme ordonnée à l'origine.
- Variations d'une fonction affine selon le signe du coefficient directeur.

Capacités attendues

- Relier représentation graphique et tableau de variations.
- Déterminer graphiquement les extrémums d'une fonction sur un intervalle.
- Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
- Pour une fonction affine, relier sens de variation, signe de la fonction et droite représentative.
- Traiter de problèmes d'optimisation.
- Fonctions valeur absolue, carré : signe et variations.
- Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f, comparer f(a) et f(b) numériquement ou graphiquement.

Démonstrations

- Variations des fonctions affines.
- Position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$, pour $x \geqslant 0$.
- Variations des fonctions carré, inverse, ~~racine carrée.~~

Exemples d'algorithme

- Pour une fonction dont le tableau de variations est donné, algorithmes d'approximation numérique d'un extrémum (balayage, dichotomie).
- Algorithme de calcul approché de longueur d'une portion de courbe représentative de fonction.

Approfondissement possible

- Relier les courbes représentatives de la fonction racine carrée et de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$.

Statistiques et probabilités

Objectifs

L'enseignement des statistiques et des probabilités en classe de seconde a pour objectifs :
- de consolider et d'approfondir les acquis de cycle 4 sur l'information chiffrée et la statistique descriptive : proportions, évolution, statistiques à une variable ;
- d'étudier le croisement de variables qualitatives (catégorielles), notamment la notion de fréquence conditionnelle, ce qui permet une initiation à l'analyse de base de données réelles ;
- de prolonger l'étude du modèle probabiliste faite en classe de troisième en introduisant la notion de probabilité conditionnelle et les arbres de probabilité ;
- d'introduire la fluctuation d'échantillonnage, en liaison avec la partie « Algorithmique et programmation ».

Information chiffrée et statistique descriptive

En matière d'information chiffrée, les élèves ont travaillé au cycle 4 effectifs, fréquences, proportions, pourcentages, coefficient de proportionnalité, taux d'évolution, coefficient multiplicateur. L'objectif est de consolider et de prolonger ce travail par l'étude de situations multiplicatives : proportion de proportion, évolutions successives ou réciproques. Les élèves doivent distinguer si un pourcentage exprime une proportion ou une évolution.

En statistique descriptive, les élèves ont étudié moyenne, médiane, quartiles, et étendue ainsi que les représentations graphiques usuelles : diagramme en barres, diagrammes circulaires, boites à moustaches. ~~On introduit la notion de moyenne pondérée et deux indicateurs de dispersion : écart interquartile et écart type.~~

~~Au cycle 4, les élèves ont travaillé sur les notions élémentaires de probabilité : expérience aléatoire, issue, événement, probabilité. Ils ont construit leur intuition sur des situations concrètes fondées sur l'équiprobabilité, puis en simulant la répétition d'épreuves identiques et indépendantes pour observer la stabilisation des fréquences. Ils sont capables de calculer des probabilités dans des contextes faisant intervenir une ou deux épreuves.~~
~~En classe de seconde, on formalise la notion de loi (ou distribution) de probabilité dans le cas fini en s'appuyant sur le langage~~

~~des ensembles et on précise les premiers éléments de calcul des probabilités. On insiste sur le fait qu'une loi de probabilité (par exemple une équiprobabilité) est une hypothèse du modèle choisi et ne se démontre pas. Le choix du modèle peut résulter d'hypothèses implicites d'équiprobabilité (par exemple, lancers de pièces ou dés équilibrés, tirage au hasard dans une population) qu'il est recommandable d'expliciter ; il peut aussi résulter d'une application d'une version vulgarisée de la loi des grands nombres, où un modèle est construit à partir de fréquences observées pour un phénomène réel (par exemple : lancer de punaise, sexe d'un enfant à la naissance). Dans tous les cas, on distingue nettement le modèle probabiliste abstrait et la situation réelle.~~

On consolide le travail sur les proportions et l'évolution, et sur l'étude des statistiques à une variable en s'appuyant sur l'interprétation des indicateurs et en introduisant l'écart type.

~~*Histoire des mathématiques*~~

~~L'histoire des probabilités fournit un cadre pour dégager les éléments de la mathématisation du hasard. Un exemple est le problème des partis, dit aussi du chevalier de Méré, l'échange de lettres entre Pascal et Fermat sur ce point puis les travaux de Pascal, Fermat et Huygens qui en découlent. Le problème du duc de Toscane ou les travaux de Leibniz sur le jeu de dés peuvent aussi être évoqués.~~

~~Utiliser l'information chiffrée et statistique descriptive~~

Contenus

Proportions

- Ensembles de référence inclus les uns dans les autres : pourcentage de pourcentage.
- ~~Proportion, pourcentage d'une sous population dans une population~~

Évolution

- Évolution : variation absolue (variation additive) $V_2 - V_1$, coefficient multiplicateur (variation multiplicative) $\frac{V_2}{V_1}$, variation relative $\frac{V_2 - V_1}{V_1}$ (taux d'évolution).
- Évolutions successives, évolution réciproque : relation sur les coefficients multiplicateurs (produit, inverse).

Statistiques à une variable

- Linéarité de la moyenne.
- ~~Indicateurs de tendance centrale d'une série statistique : moyenne pondérée~~.
- Indicateurs de dispersion : ~~écart interquartile~~, écart type.
- Influence sur la moyenne, la médiane de l'ajout ou de la suppression d'une valeur dans la série.

Regroupement par classes de même amplitude d'une série statistique continue

- Représentation graphique : histogramme, polygone des fréquences cumulées.
- Calcul de la moyenne à partir de la moyenne et des effectifs de chaque classe (moyenne pondérée) ; cas particulier où la répartition est uniforme dans chaque classe (donc égale au centre de la classe).
- Détermination de la classe médiane à partir des effectifs des classes ; estimation de la médiane dans le cas de répartition uniforme dans la classe médiane.

Capacités attendues

- Exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentages.
- Traiter des situations simples mettant en jeu des pourcentages de pourcentages.
- Exploiter la relation entre deux valeurs successives et leur taux d'évolution.
- Calculer le taux d'évolution global à partir des taux d'évolution successifs. Calculer un taux d'évolution réciproque.
- Pour une série statistique regroupée en classes :
  - calculer la moyenne à partir de la moyenne et des effectifs de chaque classe (moyenne pondérée) ; cas particulier où la répartition est uniforme dans chaque classe (donc égale au centre de la classe) ;
  - déterminer la classe médiane à partir des effectifs des classes ; estimation de la médiane dans le cas de répartition uniforme dans la classe médiane.
- Décrire ~~verbalement~~ les différences entre deux séries statistiques, en s'appuyant sur des indicateurs ou couples d'indicateurs (moyenne-écart type/ médiane-écart interquartile), sur des représentations graphiques données.
- ~~Pour des données réelles ou issues d'une simulation, lire et comprendre une fonction écrite en Python renvoyant la moyenne *m*, l'écart type *s*, et la proportion d'éléments appartenant à [*m* – 2*s*, *m* + 2*s*].~~

~~Modéliser le hasard, calculer des probabilité~~

~~L'ensemble des issues est fini.~~

~~*Contenus*~~

- ~~Ensemble (univers) des issues. Événements. Réunion, intersection, complémentaire.~~
- ~~Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un événement : somme des probabilités des issues.~~
- ~~Relation P(A ∪ B) + P(A ∩ B) = P(A) + P(B).~~
- ~~Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.~~

~~*Capacités attendues*~~

- ~~Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population)~~

~~en comprenant que les probabilités sont définies a priori.~~
- ~~Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.~~
- ~~Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.~~

~~Échantillonnage~~

~~En liaison avec la partie « Algorithmique et programmation », on définit la notion d'échantillon. L'objectif est de faire percevoir, sous une forme expérimentale, la loi des grands nombres, la fluctuation d'échantillonnage et le principe de l'estimation d'une probabilité par une fréquence observée sur un échantillon.~~

~~Contenus~~

- ~~Échantillon aléatoire de taille n pour une expérience à deux issues.~~
- ~~Version vulgarisée de la loi des grands nombres : « Lorsque n est grand, sauf exception, la fréquence observée est proche de la probabilité. »~~
- ~~Principe de l'estimation d'une probabilité, ou d'une proportion dans une population, par une fréquence observée sur un échantillon.~~

~~Capacités attendues~~

- ~~Lire et comprendre une fonction Python renvoyant le nombre ou la fréquence de succès dans un échantillon de taille *n* pour une expérience aléatoire à deux issues.~~
- ~~Observer la loi des grands nombres à l'aide d'une simulation sur Python ou tableur.~~
- ~~Simuler *N* échantillons de taille *n* d'une expérience aléatoire à deux issues. Si *p* est la probabilité d'une issue et *f* sa fréquence observée dans un échantillon, calculer la proportion des cas où l'écart entre *p* et *f* est inférieur ou égal à~~

Croisement de deux variables qualitatives

Cette section s'intéresse aux couples de variables qualitatives. L'internet fournit en effet de nombreux fichiers qui traitent des données liées aux individus et proposent des unités statistiques (pays, plantes, animaux, villes, etc.) organisées selon différentes caractéristiques (sexe, espèce, catégorie socioprofessionnelle, tranche de revenus, etc.) qu'il est intéressant de croiser. Premier contact avec les bases de données, le traitement statistique de fichiers est une activité riche et formatrice qui pourra être réinvestie par les élèves dans des projets en lien avec les enseignements de spécialité en vue de l'épreuve orale terminale.

L'étude des fréquences conditionnelles permet un travail sur la langue française en considérant les formulations usuellement utilisées dans les médias.

Des variables qualitatives de natures diverses sont étudiées : nominale (profession, espèce, département de résidence, etc.) ou ordinale (niveau d'étude, degré de satisfaction de la clientèle, etc.). Les élèves travaillent avec des données réelles dans des domaines variés (sécurité routière, démographie, économie, agronomie, etc.).

Contenus

- Tableau croisé d'effectifs.
- Fréquence conditionnelle, fréquence marginale.

Capacités attendues

- Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales.
- Compléter un tableau croisé par des raisonnements sur les effectifs ou en utilisant des fréquences conditionnelles.

Exemples d'algorithme

- À partir de deux listes représentant deux caractères d'individus, déterminer un sous-ensemble d'individus répondant à un critère (filtre, utilisation de ET, OU, NON).
- Dresser le tableau croisé de deux variables qualitatives à partir du fichier des individus et calculer des fréquences conditionnelles ou marginales.

Probabilités

Au cycle 4, les élèves ont travaillé sur les notions élémentaires de probabilité : expérience aléatoire, issue, évènement, probabilité. Ils ont construit leur intuition sur des situations concrètes fondées sur l'équiprobabilité, complétées par des répétitions d'épreuves identiques et indépendantes, permettant d'observer la stabilisation des fréquences. Ils ont été amenés à calculer des probabilités dans des contextes simples (une ou deux épreuves). Ils ont formalisé la notion de loi (ou distribution) de probabilité dans le cas fini en s'appuyant sur le langage des ensembles et ont précisé les premiers éléments de calcul des probabilités.

En classe de seconde on insiste sur le fait qu'une loi de probabilité (par exemple une équiprobabilité) est une hypothèse du modèle choisi et ne se démontre pas. Le choix du modèle peut résulter d'hypothèses implicites d'équiprobabilité (par exemple, lancers de pièces ou dés équilibrés, tirage au hasard dans une population) qu'il est recommandable d'expliciter ; il peut aussi résulter d'une application d'une version vulgarisée de la loi des grands nombres, où un modèle est construit à partir de fréquences observées pour un phénomène réel (par exemple : lancer de punaise, sexe d'un enfant à la naissance). Dans tous les cas, on distingue nettement le modèle probabiliste abstrait et la situation réelle.

L'enseignement en classe de seconde s'organise autour des objectifs suivants :
- introduire la notion de probabilité conditionnelle, sous-jacente dans toute modélisation probabiliste, et mettre en évidence la problématique de l'inversion des conditionnements ;

- calculer des probabilités à l'aide de probabilités conditionnelles et d'arbres de probabilité.

Les notions de statistique descriptive sont articulées avec le cours de probabilités. Une population statistique peut être étudiée d'un point de vue probabiliste en considérant l'expérience aléatoire de tirage au sort avec équiprobabilité dans la population. Un lien est ainsi fait entre des notions statistiques (sous-population, proportion, fréquence conditionnelle) et les notions probabilistes analogues (évènement, probabilité, probabilité conditionnelle) ; dans ce contexte, on met en évidence les relations $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ et $P_B(A) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}$

Des situations issues de différents domaines (économique, industriel, médical, etc.) sont proposées. Ce travail permet notamment de donner du sens au vocabulaire des tests diagnostiques : faux positifs, faux négatifs, spécificité et sensibilité d'un test.

Histoire des mathématiques

L'histoire des probabilités fournit un cadre pour dégager les éléments de la mathématisation du hasard. Un exemple est le problème des partis, dit aussi du chevalier de Méré, l'échange de lettres entre Pascal et Fermat sur ce point puis les travaux de Pascal, Fermat et Huygens qui en découlent. Le problème du duc de Toscane ou les travaux de Leibniz sur le jeu de dés peuvent aussi être évoqués.

Les probabilités conditionnelles peuvent être l'objet d'un travail historique en anglais ; elles apparaissent en effet dans des travaux de Bayes et de Moivre, écrits en anglais au XVIII^e siècle, même si c'est Laplace qui en a élaboré la notion. Les questions traitées par ces auteurs peuvent parfois surprendre ; néanmoins, les probabilités conditionnelles sont omniprésentes dans la vie courante et leur utilisation inappropriée mène facilement à de fausses affirmations.

Contenus

- Version vulgarisée de la loi des grands nombres : « Lorsque n est grand, sauf exception, la fréquence observée est proche de la probabilité. »
- Probabilité conditionnelle d'un évènement B sachant un évènement A de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$.
- Arbres de probabilité, application au calcul de probabilités.

Capacités attendues

- Observer la loi des grands nombres à l'aide d'une simulation sur Python ou tableur.
- Construire un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les évènements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs (tirage au sort avec équiprobabilité d'un individu dans une population) ou d'un arbre de probabilité.
- Interpréter les pondérations de chaque branche d'un arbre en termes de probabilités, et notamment de probabilités conditionnelles.
- Faire le lien entre la définition des probabilités conditionnelles et la multiplication des probabilités des branches du chemin correspondant.
- Distinguer en situation $P_A(B)$ et $P_B(A)$, par exemple dans des situations de type « faux positifs.

Le calcul de la probabilité d'un évènement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers n'est pas un attendu du programme.