Chapitre 3
Croissance linéaire

A Notre point de vue

1 Les choix faits pour traiter le programme dans ce chapitre

Dans ce chapitre, nous traitons la notion de croissance linéaire.

Nous avons fait le choix d'aborder le cas de la croissance linéaire continue dès la première séquence afin de remobiliser les connaissances acquises sur les fonctions affines dans les classes antérieures.

Dans la deuxième séquence, nous abordons la notion de suites numériques et plus particulièrement celle des suites arithmétiques permettant de modéliser les grandeurs discrètes dont l'évolution linéaire.

2 Les objectifs des activités

L'activité 1 « Croissante ou décroissante ? » permet de revoir le sens de variation d'une fonction affine. Cette activité s'appuie sur un fichier de géométrie dynamique qui permettra aux élèves de revoir le lien entre le taux d'accroissement d'une fonction affine et son sens de variation.

L'activité 2 « Je roule en électrique » a pour objectif de revoir la notion de fonction affine déjà rencontrée au collège et en classe de Seconde, ainsi que la notion de sens de variation d'une telle fonction.

L'activité 3 permet d'introduire la notion de suite numérique et de rencontrer deux formes de définition : la définition explicite et la définition par récurrence.

L'activité 4 permet d'introduire la notion de suite arithmétique et d'établir dans un cas particulier l'expression du terme général d'une telle suite.

3 Exercices

Deux pages d'exercices « Pour démarrer », six pages d'exercices « Pour s'entraîner » et une page « Faire le point » permettent d'aborder les notions du programme de façon progressive.

Les deux pages « Pour Démarrer » sont constituées d'exercices simples visant à la compréhension des notions abordées avec notamment plusieurs exercices de type « Questions flash » qui permettront de travailler également l'oral.

Les six pages « Pour s'entraîner » sont constituées d'exercices visant à travailler les capacités du programme.

Les deux pages d'exercices « Pour aller plus loin » constituent un support pour faire de la différenciation et de l'approfondissement pour les élèves les plus à l'aise sur les notions du chapitre :

• en Physique : correspondance entre degrés Celsius et Fahrenheit (exposé 2 page 76) ;

• en Économie : modélisation de l'offre et de la demande par des fonctions affines, point d'équilibre (exercice 51 page 68) ;

• en Enseignement moral et civique : modélisation du barème de l'impôt sur le revenu par une fonction affine par morceaux (taux marginal, taux moyen) (exercice 105 page 74) ;

• en Sciences de la Terre : modèle linéaire de l'évolution du niveau moyen des océans (exercice 49 page 68) ;

• en Éducation économique, financière et budgétaire : croissance d'un poste budgétaire (exercice 75 page 71) ;

• en dénombrement : motifs géométriques évolutifs (activité 3 page 60 et exercice 76 page 71).

B Se tester pour un bon départ

1 **1.** L'image de 0 par f est 3.

2. $f(1) = 4$; $f(3) = 6$; $f(4) = 3$.

3. Les antécédents de 0 par f sont –3 ; –2 et 5.

2 **1.** Faux. Le réel 3 a quatre antécédents par f.

2. Vrai.

3. Faux. Lorsque x appartient à [3 ; 4], on a $3 \leqslant f(x) \leqslant 6$.

3 **1.** Le coefficient directeur de la droite d est $\frac{1}{2}$.

2. L'ordonnée à l'origine de la droite d est –1.

3. L'ensemble solution de l'inéquation $g(x) \geqslant 2$ est $[6; +\infty[$.

4.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		–	0	+	

4 **1.** $f(1) = -2$ et $f(10) = -47$.

2. $f(2) = -5 \times 2 + 3 = -10 + 3 = -7$.

3. $f(x) = -37$ équivaut à $x = 8$. Le réel –37 a donc pour seul antécédent par f le réel 8.

5

x	0	10	20	30	40	50
$g(x)$	1	231	1 061	2 491	4 521	7 151

6 $h(n+1) = 2(n+1) + 9 = 2n + 2 + 9 = 2n + 11 = 2n + 9 + 2 = h(n) + 2$.

Réponses **b.** et **d.**

7 **a.** $x = 5$.

b. $x = 9$.

c. $x = 3$.

d. $x = -\frac{1}{5}$.

8 **a.** L'ensemble solution est $]2 ; +\infty[$.

b. L'ensemble solution est $]-\infty ; 4[$.

c. L'ensemble solution est $]-\infty ; -9]$.

d. L'ensemble solution est $]-\infty ; 2]$.

C Activités

Activité 1 Croissante ou décroissante ?

Des fichiers logiciels sont disponibles dans le manuel numérique enseignant, le manuel numérique élève et sur le site enseignant indice.editions-bordas.fr.

1. La fonction f est croissante.

2. a. La valeur de b semble n'avoir aucune influence sur le sens de variation de f.
b. Même observation.

3. a. On conjecture que lorsque a est positif la fonction f est croissante, et que lorsque a est négatif, f est décroissante.
b. Même conjecture.

4. Une fonction affine est croissante si et seulement si son taux d'accroissement est positif.
Une fonction affine est décroissante si et seulement si son taux d'accroissement est négatif.

Activité 2 Je roule en électrique

1. a. $c(700)$ est le coût total mensuel exprimé en euros pour 700 kilomètres parcourus donc :
$c(700) = 89 + 0{,}03 \times 700 = 110$.
$c(1\,200)$ est le coût total mensuel exprimé en euros pour 1 200 kilomètres parcourus donc :
$c(1\,200) = 89 + 0{,}03 \times 1\,200 = 125$.
b. Lorsque le nombre x de kilomètres parcourus augmente, le coût total mensuel $c(x)$ augmente. La fonction c est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.
c. On a $c(x) = 89 + 0{,}03x = 0{,}03x + 89$ pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$.
La fonction c est donc une fonction affine.
d. La fonction c est une fonction affine et le coefficient de x dans l'expression $c(x)$ est positif puisqu'il est égal à 0,03. On en déduit que c est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. a. L'énergie stockée dans la batterie lorsqu'elle a été complètement chargée est $k(0)$, soit 42 kWh.
b. La fonction k est une fonction affine.
c. Le coefficient de x dans l'expression $k(x)$ est – 0,15. Ce nombre étant négatif, on en déduit que la fonction affine k est décroissante.
En roulant la voiture consomme de l'énergie, donc la batterie se décharge : lorsque le nombre x de kilomètres parcourus augmente l'énergie disponible dans la batterie diminue.
d. On résout l'inéquation $k(x) \geqslant 0$.
Cette inéquation équivaut à $42 - 0{,}15x \geqslant 0$ soit à $x \leqslant \frac{42}{0{,}15}$ c'est-à-dire à $x \leqslant 280$.
Dans les conditions énoncées, Nejma pourra parcourir 280 kilomètres.

Activité 3 Le champ de pommiers

1. a. $p(1) = 1$; $p(2) = 4$ et $p(3) = 9$.

b. $p(n) = n^2$.

2. a. $c(1) = 9$; $c(2) = 13$ et $c(3) = 17$.

b. Le fermier doit planter 4 conifères supplémentaires.

c. $c(n + 1) = c(n) + 4$.

Activité 4 Un abonnement au cinéma

1. $u(2) = 52$ et $u(3) = 58$.

2. $u(12) – u(11) = 6$ et $u(13) – u(12) = 6$.

3. $u(n + 1) = u(n) + 6$.

4. a. Pour 19 places de cinéma, Margaux paiera 114 euros.

b. Pour n places de cinéma, Margaux paiera $6n$ euros.

5. $u(n) = 40 + 6n$.

C Exercices

Pour démarrer

1 **1.** Le taux d'accroissement m de f est 2.

2. m est positif.

3. Comme le taux d'accroissement de la fonction affine f est positif, cette fonction est croissante.

2 Si g est décroissante, son taux d'accroissement m est négatif.

3 **1.** $\frac{f(11)-f(8)}{11-8} = 3$.

2. $f(0) = 9$.

4 **1.** Faux. Le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$ est le taux d'accroissement de la fonction affine f, donc il est égal à –2.

2. Faux. $f(0) = 3$ donc $f(0) \neq 0$. La droite $\mathcal{D}$ ne passe pas par l'origine du repère.

3. Vrai, car $f(1) = 1$.

5 **1. a.** Le coefficient de x dans l'expression $f(x)$ est $\frac{1}{2}$.

Comme $\frac{1}{2}$ est positif, la fonction affine f est croissante.

b. Le coefficient de x dans l'expression $g(x)$ est -2.

Comme -2 est négatif, la fonction affine g est décroissante.

2. la fonction h est constante.

3. La droite d_1 représente la fonction h.

La droite d_2 représente la fonction f.

La droite d_3 représente la fonction g.

6 **1. a.** $f(2) = 1$ et $f(6) = -1$.

b. $m = \frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{-1-1}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

2. L'ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$ est 2.

3. La droite $\mathcal{D}$ a pour équation réduite $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

7 **1.** L'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution 4.

2.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

8 **1.** $g(x) = 0$ équivaut à $3x - 6 = 0$ donc à $3x = 6$ soit à $x = 2$.
2. Le taux d'accroissement de la fonction g est égal à 3, ce taux d'accroissement est donc positif.
3.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

9 **1.** Réponse **a.** $V(t) = 20t$.
2. Réponse **c.** $p(x) = 0{,}8x + 2{,}5$.

10 **1.** Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 2 % est 1,02.
2. $p(x) = 1{,}02x$.

11 Le deuxième terme de la suite est noté $u(1)$ et le cinquième terme est noté $u(4)$.

12 **1.** $v(1) = 5$ et $v(4) = 9$.
2. Les termes égaux à 3 sont $v(3)$, $v(5)$ et $v(8)$.

13 $u(0) = -2$; $u(1) = 1^2 - 2 = -1$; $u(2) = 2^2 - 2 = 2$ et $u(16) = 16^2 - 2 = 254$.

14 $w_0 = 2$, $w_1 = -1$ et $w_9 = -25$.

15 $u_1 = (u_0)^2 = 3^2 = 9$; $u_2 = (u_1)^2 = 9^2 = 81$.

16 **1.** $v(1) = 2 \times 3 - 1 = 5$.
2. $v(2) = 2v(1) - 1$ donc $v(2) = 2 \times 5 - 1 = 9$.
3. $v(3) = 2v(2) - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$.

17 $u(1) = 2$; $u(3) = 0$ et $u(6) = 2$.

18 **1.** $v(7) \geqslant v(8)$.
2. $u(10) \leqslant u(11)$.

19 **1.** $u_1 = u_0 + r = 3 + 2 = 5$.
2. $u_2 = u_1 + r = 5 + 2 = 7$.

20 **1.** $v_3 = 11$ et $v_4 = 13$.
2. La raison de cette suite arithmétique est 2.

21 **1.** $u_1 = u_0 + r = 7$ et $u_2 = u_1 + r = 10$.

2. a. $u_n = 4 + n \times 3 = 4 + 3n$.

b. $u_{12} = 4 + 3 \times 12 = 40$.

22 **1.** Le premier terme de la suite est $u_0 = -1$ et la raison de cette suite est 2.

2. La suite u est croissante.

23 Le premier terme de cette suite est égal à 10 et la raison est –2.

24 Les suites v et w permettent de modéliser un phénomène de croissance linéaire.
Les bonnes réponses sont **b.** et **c.**

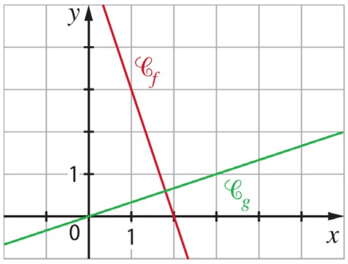
25 Les phénomènes discrets linéaires sont les phénomènes décrits en **a.** et **c.**

Pour s’entraîner

26 **1.** La fonction f est une fonction affine dont le taux d’accroissement est égal à –3 qui est négatif, donc f est décroissante.

La fonction g est une fonction affine dont le taux d’accroissement est égal à $\frac{1}{3}$ qui est positif, donc g est croissante.

2. La courbe représentative de la fonction f passe par les points de coordonnées (1 ; 3) et (2 ; 0).
La courbe représentative de la fonction g passe par les points de coordonnées (0 ; 0) et (3 ; 1).



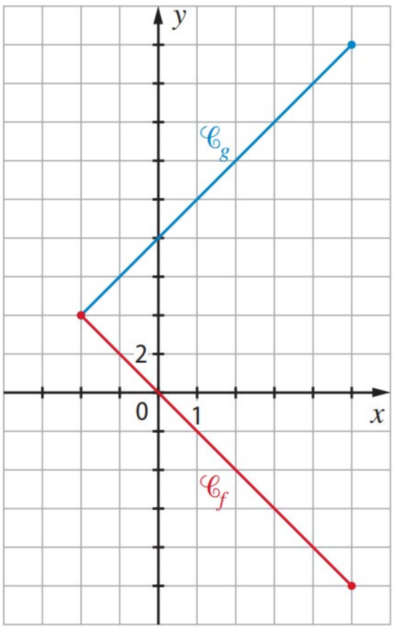
27 **1.** Le taux d’accroissement de la fonction affine f est négatif puisqu’il est égal à –2, donc f est décroissante sur [–2 ; 5]. De plus $f(-2) = 4$ et $f(5) = -10$.
On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	–2	5
$f(x)$	4 ↘	–10

Le taux d’accroissement de la fonction affine g est positif puisqu’il est égal à 2, donc g est croissante sur [–2 ; 5]. $g(-2) = 4$ et $g(5) = 18$.
On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	–2	5
$g(x)$	4 ↗	18

2.



28 **1.** f est une fonction linéaire décroissante, donc sa représentation graphique est la droite d_3.
La fonction g est décroissante, donc par élimination de d_3, on en déduit que la représentation graphique de g est la droite d_2.
La fonction h est croissante et sa représentation graphique passe par le point de coordonnées (0 ; 1) puisque $h(0) = 1$. On en déduit que la représentation graphique de h est la droite d_1.

2. Le coefficient directeur de la droite d_4 est $\frac{1}{2}$ et cette droite passe par l'origine du repère. On en déduit que d_4 est la représentation graphique de la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \frac{1}{2}x$.

29 **1.** Vrai. Comme $h(2) < h(100)$ donc h n'est pas constante et h n'est pas décroissante.
Comme de plus h est une fonction affine, on déduit que h est croissante.

2. Faux. Le taux d'accroissement de h est $\frac{h(100)-h(2)}{100-2} = \frac{55-6}{98} = \frac{49}{98} = \frac{1}{2}$.

3. Vrai.
Comme le taux d'accroissement de h est égal à $\frac{1}{2}$, on a $h(x) = \frac{1}{2}x + p$ pour tout réel x.
De plus, $h(2) = 6$ donc $\frac{1}{2} \times 2 + p = 6$ d'où $p = 5$.

30 **1.** Une fonction affine est soit croissante soit décroissante soit constante.
$f(0) \neq f(3)$ donc f n'est pas constante.
$0 < 3$ et $f(0) > f(3)$ donc f n'est pas croissante.
On en déduit que f est décroissante.

2. Le taux d'accroissement de f est le taux d'accroissement de f entre 0 et 3, donc :
$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}$ soit $\frac{5-(-1)}{3} = 2$.

3. Pour tout réel x, $f(x) = 2x + p$ où p est un nombre réel.
Comme $f(0) = 5$, on en déduit que $p = 5$ et $f(x) = 2x + 5$ pour tout réel x.

31 **1.** Comme $g(-4) < g(5)$, g n'est ni constante, ni décroissante.
De plus, la fonction g est une fonction affine et on en déduit que g est croissante.

2. On a $m = \frac{g(5)-g(-4)}{5-(-4)} = \frac{13-(-14)}{9} = \frac{27}{9} = 3$.

3. a. On a $g(x) = 3x + p$ pour tout réel x donc $g(5) = 3 \times 5 + p = 15 + p$.

b. $g(5) = 13$ équivaut à $15 + p = 13$ donc à $p = -2$.
On en déduit que $g(x) = 3x - 2$ pour tout réel x.

32 **1. a.** Le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$ est $\frac{1}{2}$.

b. Graphiquement, on détermine que l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathscr{D}$ est 1. La droite $\mathscr{D}$ a donc pour équation $y = \frac{1}{2}x + 1$, donc l'expression de f est $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

2. a. Le taux d'accroissement de *g* est le réel *m* tel que $m = \frac{g(2)-g(6)}{2-6}$.
Comme la représentation graphique de *g* passe par les points A(2 ;3) et B(6 ;–15), on a $g(2) = 3$ et $g(6) = -15$.

On a alors : $m = \frac{3-(-15)}{2-6} = \frac{3+15}{-4} = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$.

b. L'expression de *g* st de la forme $g(x) = -\frac{9}{2}x + p$ où p est un réel.

On a $g(2) = 3$ donc $-\frac{9}{2} \times 2 + p = 3$ soit $-9 + p = 3$ donc $p = 12$.

La fonction *g* a pour expression $g(x) = -\frac{9}{2}x + 12$.

33 **1.** Les points $A_1(-2 ; 2)$ et $B_1(0 ; 1)$ appartiennent à d_1. De A_1 vers B_1, on augmente l'abscisse de 2 unités et on diminue l'ordonnée de 1 unité donc le coefficient directeur de d_1 est $-\frac{1}{2}$.
Sur d_2, quand on augmente de 1 unité l'abscisse, on augmente de 2 unités l'ordonnée, donc le coefficient directeur de d_2 est 2.
Sur d_3, quand on augmente de 3 unités l'abscisse, on augmente de 1 unité l'ordonnée, donc le coefficient directeur de d_3 est $\frac{1}{3}$.

2. L'ordonnée à l'origine de d_1 est 1 donc l'expression de *f* est $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

L'ordonnée à l'origine de d_2 est –3 donc l'expression de *g* est $g(x) = 2x - 3$.

L'ordonnée à l'origine de d_3 est –2 donc l'expression de *h* est $h(x) = \frac{1}{3}x - 2$.

34 **1.** $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{11-(-5)}{3-(-1)} = \frac{16}{4} = 4$.

2. *f* a une expression de la forme $f(x) = 4x + p$.
Comme $f(3) = 11$, $4 \times 3 + p = 11$ d'où $p = -1$. Donc $f(x) = 4x - 1$.

35 **1.** Le coefficient directeur de la droite *d* est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2\,270 - 770}{30 - 10} = \frac{1\,500}{20} = 75$.

2. L'expression de *f* est de la forme $f(x) = 75x + p$.

Comme $f(10) = 770$, on en déduit l'égalité $750 + p = 770$ d'où $p = 20$.

L'expression de *f* est $f(x) = 75x + 20$.

36 *Des programmes Python (ordinateur et calculatrices) sont disponibles dans le manuel numérique enseignant. WebPython élève, utilisez le mini-lien : bordas.media/740028_python.*
WebPython enseignant, utilisez le mini-lien : bordas.media/740303_python.

1. $m = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{d - b}{c - a}$.

2. $f(a) = b$ équivaut à $ma + p = b$ donc à $p = b - ma$.

3.

```python
def affine(a, b, c, d):
    m = (d-b)/(c-a)
    p = b - m*a
    return m, p
```

37 $f(x) = 0$ équivaut à $2x + 10 = 0$ soit $x = -5$.
De plus, le taux d'accroissement de f est positif, d'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$g(x) = 0$ équivaut à $-6x + 18 = 0$ soit $x = 3$.
De plus, le taux d'accroissement de g est négatif, d'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

38 $f(x) = 0$ équivaut à $-3x + 7 = 0$ soit $x = \frac{7}{3}$.
De plus, le taux d'accroissement de f est négatif, d'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$g(x) = 0$ équivaut à $\frac{1}{3}x - 4 = 0$ soit $x = 12$.
De plus, le taux d'accroissement de g est positif d'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		12		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

39 **a.** $7x + 1 > 8$ équivaut à $7x > 7$ donc à $x > 1$.
L'ensemble solution de cette inéquation est $]1\,;+\infty[$.

b. $-5x < 2x + 14$ équivaut à $-7x < 14$ donc à $x > -2$.
L'ensemble solution de cette inéquation est $]-2\,;+\infty[$.

c. $9x + 2 < 11x + 8$ équivaut à $-2x > 6$ donc à $x < -3$.
L'ensemble solution de cette inéquation est $]-\infty\,;-3[$.

d. $7x + 11 > 8x + 5$ équivaut à $-x > -6$ donc à $x < 6$.
L'ensemble solution de cette inéquation est $]-\infty\,;6[$.

40 **a.** $0{,}2x + 1 \geqslant 0{,}3x + 7$ équivaut à $-0{,}1x \geqslant 6$ donc à $x \leqslant -60$.
L'ensemble solution de cette inéquation est $]-\infty\,;-60]$.

b. $4 - x \geqslant 0{,}1x + 15$ équivaut à $-1{,}1x \geqslant 11$ donc à $x \leqslant -10$.
L'ensemble solution de cette inéquation est $]-\infty\,;-10]$.

c. $\frac{1}{2}x + 5 < 7$ équivaut à $\frac{1}{2}x < 2$ donc à $x < 4$.
L'ensemble solution de cette inéquation est $]-\infty\,;4[$.

d. $\frac{4}{3}x + 2 \geqslant \frac{1}{2}x + 3$ équivaut à $\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right)x \geqslant 1$ donc à $\frac{5}{6}x \geqslant 1$ soit à $x \geqslant \frac{6}{5}$.
L'ensemble solution de cette inéquation est $\left[\frac{6}{5}\,;+\infty\right[$.

41 **1. a.** $f(x) \leqslant 15\,000$ équivaut à $-23x + 50\,000 \leqslant 15\,000$ donc à $-23x \leqslant 35\,000$ soit à $x \geqslant -\frac{35\,000}{23}$. L'ensemble solution de cette inéquation est donc $\left[-\frac{35\,000}{23}\,;+\infty\right[$.

b. Comme $-\frac{35\,000}{23} < 0$, le plus petit entier **naturel** n tel que $f(n) \leqslant 15\,000$ est 0.

2. a. $g(x) = 0$ équivaut à $9x - 300 = 0$ soit à $x = \frac{100}{3}$.

De plus, le taux d'accroissement de g est positif d'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$\frac{100}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

b. Comme $\frac{100}{3} \approx 33{,}33$, le plus grand entier naturel n tel que $g(n)$ soit négatif est 33.

42 **1. a.** $f(x) \leqslant 22\,000$ équivaut à $142x \leqslant 16\,400$ donc à $x \leqslant \frac{16\,400}{142}$ soit à $x \leqslant \frac{8\,200}{41}$.
L'ensemble solution de cette inéquation est $\left]-\infty; \frac{8200}{41}\right]$.
b. Comme $\frac{8200}{41} \approx 115{,}49$ le plus grand entier n tel que $f(n) \leqslant 22\,000$ est 115.
2. a. $g(x) = 0$ équivaut à $-5x = -1\,324$ donc à $x = \frac{-1\,324}{-5} = 264{,}8$.
Comme le coefficient –5 est négatif, on déduit le tableau de signes de $g(x)$:

x	$-\infty$		264,8		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

b. Le plus petit entier naturel n tel que $g(n)$ soit négatif est 265.

43 f_1 est croissante et s'annule pour $x = 2$. Le tableau de signes de f_1 est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f_1(x)$		$-$	0	$+$	

f_2 est croissante et s'annule pour $x = \frac{1}{2}$. Le tableau de signes de f_2 est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_2(x)$		$-$	0	$+$	

f_3 est décroissante et s'annule pour $x = \frac{1}{2}$. Le tableau de signes de f_3 est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_3(x)$		$+$	0	$-$	

f_4 est décroissante et s'annule pour $x = 2$. Le tableau de signes de f_4 est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f_4(x)$		$+$	0	$-$	

44 La représentation graphique **A** correspond au tableau de signes de $i(x)$.
La représentation graphique **B** correspond au tableau de signes de $f(x)$.
La représentation graphique **C** correspond au tableau de signes de $g(x)$.
La représentation graphique **D** correspond au tableau de signes de $h(x)$.

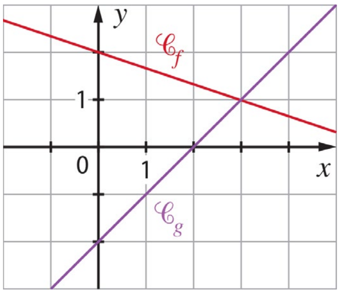
45 **1.** L'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \geqslant 3$ est $[4\,;+\infty[$.

2. $f(x) \geqslant 3$ équivaut à $0{,}5x + 1 \geqslant 3$ soit à $0{,}5x \geqslant 2$ donc à $x \geqslant \frac{2}{0.5}$ soit à $x \geqslant 4$.
L'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \geqslant 3$ est bien $[4\,;+\infty[$.

46 **1.** L'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leqslant 1$ est $[3\,;+\infty[$.

2. $f(x) \leqslant 1$ équivaut à $-\frac{1}{3}x + 2 \leqslant 1$ soit à $-\frac{1}{3}x \leqslant -1$ donc à $x \geqslant \frac{-1}{-\frac{1}{3}}$ soit à $x \geqslant 3$.
On retrouve le résultat précédent.

47 **1.**



2. a. L'équation $f(x) = g(x)$ a pour unique solution 3.
b. L'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ a pour ensemble solution $[3\,;+\infty[$.
3. $f(x) = g(x)$ équivaut à $-\frac{1}{3}x + 2 = x - 2$ soit à $-\frac{1}{3}x - x = -4$ donc à $-\frac{4}{3}x = -4$
c'est-à-dire à $x = -4 \times \frac{-3}{4}$ soit $x = 3$.
$f(x) \leqslant g(x)$ équivaut à $-\frac{1}{3}x + 2 \leqslant x - 2$ soit à $-\frac{1}{3}x - x \leqslant -4$ donc à $-\frac{4}{3}x \leqslant -4$
c'est-à-dire à $x \geqslant -4 \times \frac{-3}{4}$ soit $x \geqslant 3$.

48 **1.** $44{,}91 + 2{,}84 \times 120 = 385{,}71$.
Un ménage consommant 120 m^3 par an paiera 385,71 € annuellement.
2. $f(x) = 44{,}91 + 2{,}84x$.
3. $44{,}91 + 2{,}84x = 475{,}17$ équivaut à $2{,}84x = 430{,}26$ donc à $x = 151{,}5$.
La famille a consommé 151,5 m^3 d'eau.
4. $44{,}91 + 2{,}84x > 600$ équivaut à $2{,}84x > 555{,}09$ soit à $x > \frac{555{,}09}{2{,}84}$.
Comme $\frac{555{,}09}{2{,}84} \approx 195{,}455$ arrondi au millième par excès, la facture d'eau dépasse 600 € à partir de 195,455 m^3 arrondi au dm^3.

49 **1.** $m = 0{,}42$.
2. a. $h(2020) = 20$.
b. $h(2020) = 20$ conduit à $0{,}42 \times 2020 + p = 20$ d'où $p = -828{,}4$.
Finalement $h(x) = 0{,}42x - 828{,}4$ pour tout $x \geqslant 2020$.
3. $h(2100) = 0{,}42 \times 2100 - 828{,}4 = 53{,}6$. Selon ce modèle, le niveau moyen des océans aura augmenté de 53,6 centimètres par rapport à 1900 en 2100.

4. $h(x) \geqslant 60$ équivaut à $0{,}42x - 828{,}4 \geqslant 60$ donc à $x \geqslant \frac{888{,}4}{0{,}42}$

et comme $\frac{888{,}4}{0{,}42} \approx 2115{,}24$, c'est en 2115 que le niveau moyen des océans aura augmenté de 60 cm par rapport à 1900.

50 **1.** $60 + 0{,}25 \times 300 = 135$. Donc le coût de la location pour 300 km parcourus est 135 €.
2. $P(x) = 0{,}25x + 60$.
3. $P(x) = 95$ équivaut à $0{,}25x = 35$ soit à $x = \frac{35}{0{,}25} = 140$. Si le prix est de 95 €, alors on a parcouru 140 km.
4. $P(x) > 200$ équivaut à $0{,}25x > 140$ soit à $x > \frac{140}{0{,}25}$ donc à $x > 560$.
Le commercial devrait opter pour ce forfait de 200 €, lorsqu'il parcourt plus de 560 km.

51 **1. a.** $d(5) = -3{,}5 \times 5 + 84 = 66{,}5$ et $o(5) = 2 \times 5 + 18 = 28$.
b. Dans ce cas, l'offre ne suffit pas à satisfaire la demande.
2. a. $d(20) = -3{,}5 \times 20 + 84 = 14$ et $o(20) = 2 \times 20 + 18 = 58$.
b. Dans ce cas, il y a trop de production par rapport à la demande.
3. a. Le prix d'équilibre est de 12 € la tonne.
b. $d(x) = o(x)$ équivaut à $-3{,}5x + 84 = 2x + 18$ donc à $-5{,}5x = -66$ soit à $x = 12$.
c. $d(12) = 42$. Au prix d'équilibre, la demande est de 42 tonnes.

52 **1.** $u(0) = -4$; $u(1) = 1$; $u(2) = 16$.

2. Le cinquième terme de la suite u est $u(4) = 76$.

53 **1.** $v(0) = 4$; $v(1) = 3v(0) - 5 = 7$; $v(2)= 3v(1) - 5 = 16$.
2. Le cinquième terme de la suite v est $v(4)$.
On a $v(4) = 3v(3) - 5$ et $v(3) = 3v(2) - 5 = 43$ donc $v(4) = 124$.

54 **1.** Vrai : $u_1 = {u_0}^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1$, puis $u_2 = {u_1}^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$
et $u_3 = {u_2}^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$.
2. Faux : $u_{20} = 20^2 + 1 = 401$ et $u_{21} = 21^2 + 1 = 442$ donc $u_{21} \neq {u_{20}}^2 + 1$
puisque ${u_{20}}^2 + 1 = 160\,802$.

55

```
U ← −1
Pour k variant de 1 à 12
    U ← 3 × U + 4
Fin Pour
```

56 *Des fichiers logiciels sont disponibles dans le manuel numérique enseignant, le manuel numérique élève et sur le site enseignant indice.editions-bordas.fr*

1. Dans la cellule **B3**, on peut saisir la formule : **=3*A3+1**.

2. Dans la cellule **C3**, on peut saisir la formule : **=2*C2+1**.

57 **1. a.** $u_1 = u_0 + 4 = 19$; $u_2 = u_1 + 4 = 23$.

b. Pour tout entier naturel n, $u_n = 15 + 4n$.

c. Le 31e terme est le terme d'indice 30 puis que le premier terme à pour indice 0.

$u_{30} = 15 + 4 \times 30 = 135$.

2. a. Comme pour tout entier naturel non nul, $v_{n+1} = v_n + 12{,}7$, la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 12{,}7$. Son premier terme est $v_1 = 9$.

b. Pour tout entier naturel n non nul, $v_n = v_1 + (n-1) \times r = 9 + (n-1) \times 12{,}7$.

Donc $v_n = 9 + 12{,}7n - 12{,}7 = -3{,}7 + 12{,}7n$.

c. $v_{27} = -3{,}7 + 12{,}7 \times 27 = 339{,}2$.

58 **1. a.** $u_1 = u_0 + r = 25 + (-3) = 22$.

$u_2 = 22 + (-3) = 19$.

b. $u_n = u_0 + nr = 25 - 3n$.

c. Le 35e terme est le terme d'indice 34, c'est-à-dire u_{34}.

Or $u_{34} = 25 - 3 \times 34 = -77$.

2. a. Pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = v_n + (-2{,}5)$ donc la suite (v_n) est arithmétique de raison –2,5.

b. $v_n = v_1 + (n-1) \times (-2{,}5)$ donc $v_n = -34 - 2{,}5n + 2{,}5 = -31{,}5 - 2{,}5n$.

c. $v_{123} = -31{,}5 - 2{,}5 \times 123 = -339$.

59 **1.** $u_1 = u_0 + r = -7 + 4 = -3$; $u_2 = u_1 + r = -3 + 4 = 1$; $u_3 = u_2 + r = 1 + 4 = 5$.

2. $u_n = -7 + 4n$.

3. Le onzième terme est u_{10} et $u_{10} = -7 + 4 \times 10 = 33$.

$u_{60} = -7 + 4 \times 60 = 233$.

60 **1.** $u_1 = u_0 + r = 5 + (-6) = -1$; $u_2 = u_1 + r = -1 + (-6) = -7$;

$u_3 = u_2 + r = -7 + (-6) = -13$.

2. $u_n = 5 - 6n$.

3. Le douzième terme est u_{11} et $u_{11} = 5 - 6 \times 11 = -61$.

$u_{33} = 5 - 6 \times 33 = -193$.

61 **1.** La suite (v_n) est arithmétique de raison positive égale à 1,7, donc cette suite est croissante.

2. $v_n = v_1 + (n-1) \times 1{,}7 = -5{,}1 + 1{,}7n$.

3. $v_{79} = -5{,}1 + 1{,}7 \times 79 = 129{,}2$.

62 **1.** La suite (v_n) est arithmétique de raison négative égale à –3,2, donc cette suite est décroissante.

2. $v_n = v_1 + (n - 1) \times (-3{,}2) = 105{,}1 - 3{,}2n$.

3. $v_{53} = 105{,}1 - 3{,}2 \times 53 = -64{,}5$.

63 **1.** $u_5 = u_0 + 5r = -4 + 5r$.

2. $-4 + 5r = 11$ équivaut à $5r = 15$ donc à $r = 3$.

3. $u_n = -4 + 3n$.

64 **1.** La raison de cette suite est $r = \frac{u_4 - u_0}{4 - 0} = -11$.

2. $u_{14} = u_0 + 14r = -31$.

65 **1.** Réponses **a.** et **d.**

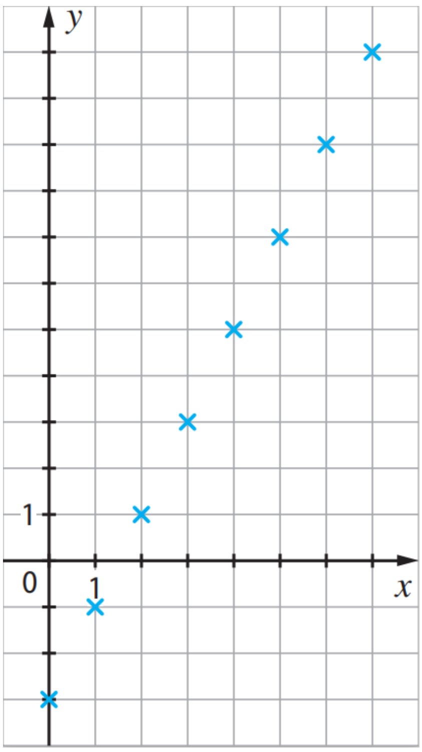
2. Réponse **c.**

66 *Des fichiers logiciels sont disponibles dans le manuel numérique enseignant, le manuel numérique élève et sur le site enseignant indice.editions-bordas.fr*

Formules **c.** et **d.**

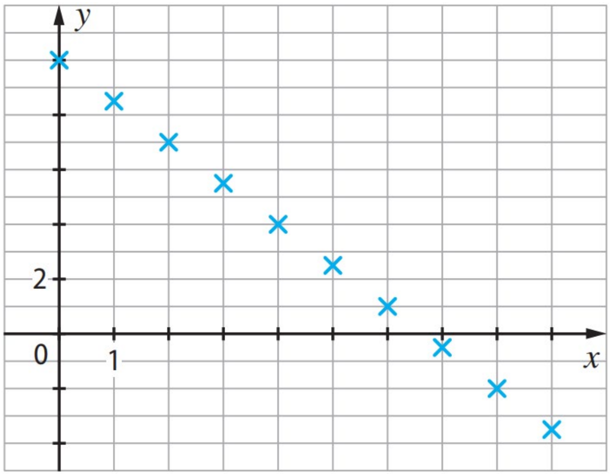
67 **1.** $u_1 = -1$; $u_2 = 1$; $u_3 = 3$; $u_4 = 5$; $u_5 = 7$; $u_6 = 9$ et $u_7 = 11$.

2.



68 **1.** $u_1 = u_0 - 1{,}5 = 8{,}5$; $u_2 = u_1 - 1{,}5 = 7$; $u_3 = 5{,}5$; $u_4 = 4$; $u_5 = 2{,}5$; $u_6 = 1$; $u_7 = -0{,}5$; $u_8 = -2$ et $u_9 = -3{,}5$.

2.



69 **1.** Le point d'abscisse 0 de la représentation graphique a pour ordonnée –4 donc $v_0 = -4$
On lit $v_1 = -2$ donc $r = v_1 - v_0 = 2$.

2. L'indice du premier terme supérieur à 3 est 4. Comme la suite (v_n) est croissante, 4 est aussi l'indice à partir duquel tous les termes sont supérieurs à 3 est 4.

70 **1.** Le point d'abscisse 0 de la représentation graphique a pour ordonnée 8 donc $v_0 = 8$.
On lit $v_1 = 6$ donc la raison r vérifie : $r = v_1 - v_0 = -2$.
2. L'indice du premier terme strictement négatif de cette suite est 5. La suite (v_n) étant décroissante, 5 est aussi l'indice à partir duquel tous les termes de cette suite sont strictement négatifs.

71 **1.** $u_n = 152 + 25n$.

2. $152 + 25n > 8\,420$ équivaut à $25n > 8268$ soit à $n > 330{,}72$.
L'indice du premier terme dépassant 8 420 est 331.

72 **1.** $w_n = w_1 + (n-1) \times (-13)$ donc $w_n = 256 - 13n + 13$ soit $w_n = 269 - 13n$.

2. $w_n < 0$ équivaut à $-13n < -269$ donc à $n > \frac{-269}{-13}$.

Comme $\frac{-269}{-13} \approx 20{,}69$, on déduit que l'indice du premier terme strictement négatif est 21.

73 **1.** $u_{n+1} = u_n + 6$. La suite (u_n) est arithmétique de raison 6 et de premier terme $u_0 = 70$.
2. $u_n = 70 + 6n$.

3. $u_9 = 70 + 6 \times 9 = 124$. Selon ce modèle, en 2030 il y aura 124 ours.

4. $u_n > 200$ équivaut à $70 + 6n > 200$ donc à $6n > 130$ soit à $n > \frac{65}{3}$.

Comme $\frac{65}{3} \approx 21{,}67$, c'est au cours de l'année 2042 que la population devrait dépasser 200 individus.

74 **1.** $u_1 = 229$; $u_2 = 234$.

2. $u_{n+1} = u_n + 5$. La suite (u_n) est arithmétique de raison 5.

3. a. $u_n = 224 + 5n$.

b. 2 035 = 2 022 + 13 et $u_{13} = 289$. Donc en 2035, le club comptera 289 adhérents.

c. $u_n > 400$ équivaut à $5n > 176$ soit à $n > \frac{176}{5}$ c'est-à-dire $n > 35{,}2$.

2 022 + 36 = 2 058, c'est à partir de 2058 que le nombre d'adhérents du club dépassera 400.

75 **1.** $a_1 = 1\,807$. Le salaire du deuxième mois est 1 807 euros.

2. $a_{n+1} = a_n + 7$ pour tout entier naturel n.

La suite (a_n) est arithmétique de raison 7 et de premier terme $a_0 = 1\,800$.

3. $a_n = 1\,800 + 7n$.

4. $a_6 = 1\,800 + 7 \times 6 = 1\,842$. Le salaire du 7e mois est 1 842 €.

5. $1\,800 + 7n > 2\,500$ équivaut à $7n > 700$ donc à $n > 100$. Le premier terme de la suite qui dépasse 2 500 est u_{101} donc c'est à partir du 102e mois que le salaire dépassera 2 500 €.

76 **1. a.** Pour le premier pattern, il faut trois allumettes.

b. Pour le deuxième pattern, il faut cinq allumettes.

c. Pour le troisième pattern, il faut sept allumettes.

2. $u_1 = 3$; $u_2 = 5$ et $u_3 = 7$.

3. $u_{n+1} = u_n + 2$.

4. La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_1 = 3$ et de raison 2.

Pour tout entier naturel n non nul : $u_n = 1 + 2n$.

5. $u_n \leqslant 240$ équivaut à $1 + 2n \leqslant 240$ donc à $2n \leqslant 239$ soit à $n \leqslant 119{,}5$.

Le plus grand pattern que l'on peut réaliser avec 240 allumettes porte le numéro 119.

Voir le corrigé de l'exercice 77 ci-après.

78 **1. a.** La pression atmosphérique diminue de 11 hectopascals lorsque l'altitude augmente de 100 mètres.

b.

Altitude (en m)	0	100	200	500
Pression atmosphérique (en hPa)	1 013,25	1 002,25	991,25	958,25

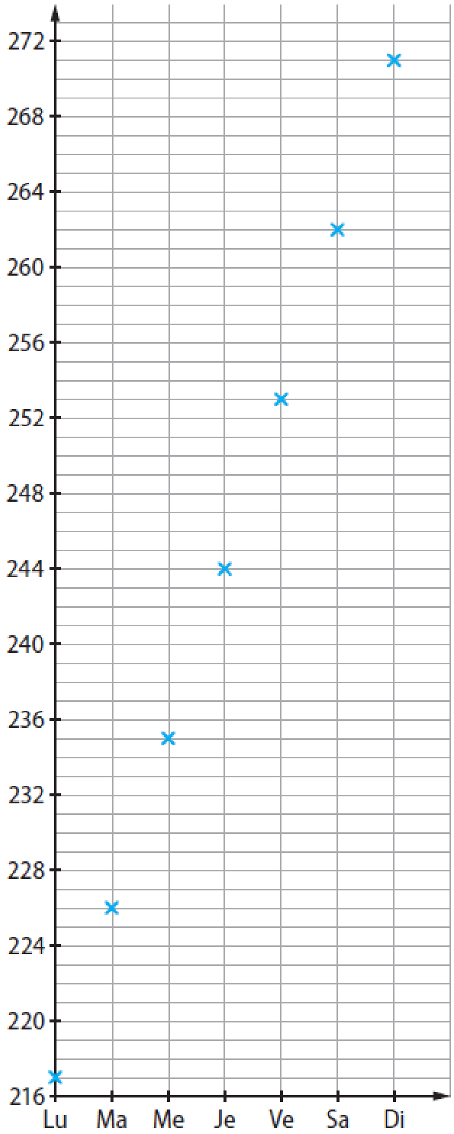
2. a. $p_1 = 1\,013{,}14$ et $p_1 = 1\,013{,}03$.

b. Pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = p_n - 0{,}11$ donc la suite (p_n) est arithmétique de raison – 0,11.

c. $p_n = p_0 + n \times (-0{,}11)$ donc $p_n = 1\,013{,}25 - 0{,}11n$.

3. $p_n < 960$ équivaut à $1\,013{,}25 - 0{,}11n < 960$ donc à $-0{,}11n < -53{,}25$ soit à $n > \frac{53{,}25}{0{,}11}$. Comme $\frac{53{,}25}{0{,}11} \approx 484{,}09$, on en déduit que la pression atmosphérique est inférieure à 960 hPa à partir de l'altitude 485 mètres.

77 **1.**



On constate que les points représentant cette suite sont alignés.

2. Comme les points sont alignés, on peut considérer que la taille de ce bambou suit une croissance linéaire.

3. a. La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 217$ et de raison $r = 9$.

b. $u_n = 217 + 9n$.

c. $u_{13} = 334$. On peut estimer que le bambou mesurera 334 cm treize jours après le début de l'observation.

Pour faire le point

79 **1.** B ; **2.** B.

80 **1.** A, B et C.
2. A.
3. A.

81 **1.** Vrai.
2. Faux.
3. Vrai.
4. Faux.
5. Faux.

82 **1.** Vrai.

2. Faux.

Automatismes

83 **a.** 25. **b.** 200. **c.** 8 €. **d.** 240 litres.

84 **a.** 105. **b.** 12 tonnes. **c.** 90 €. **d.** 10.

85 **1.** $145 \times 0{,}7 = 101{,}5$. La veste est soldée au prix de 101,50 €.
2. $18\ 750 \times 1{,}12 = 21\ 000$. Le chiffre d'affaires du magasin est de 21 000 € en juillet.

86 $\frac{1}{1{,}21} \approx 0{,}826$ à 0,001 près et $0{,}826 - 1 = -0{,}174 = -17{,}4\ \%$. Le taux d'évolution réciproque d'une augmentation de 21% est d'environ –17,4% à 0,1% près.

87 $\frac{1}{0{,}93} \approx 1{,}075$ à 0,001 près. Le taux d'évolution réciproque d'une diminution de 7 % est d'environ 7,5 % à 0,1 % près.

88 $\frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$. Les dépenses devront diminuer de 20 %.

89 $1{,}25 \times 0{,}9 = 1{,}125$ donc le taux global d'évolution d'une augmentation de 25 % suivie d'une diminution de 10 % est 12,5 %.

90 $0{,}9 \times 1{,}1 \times 1{,}06 = 1{,}0494$. Le taux global d'évolution de l'action est 4,94 %.

91 $A = 16$ et $B = 17$.

92 $A = 6$ et $B = 1$.

93 $A = 60$ et $B = 10$.

94 **1.** Vrai, car $A \approx 3 \times 60$.
2. Faux, car $B \approx 300 \times 1\ 000$ donc un ordre de grandeur de B est 300 000.

95 **1.** Ordre de grandeur du coût de la sortie : $2 \times 10 + 5 + 4 + 1 = 30$. Soit 30 €.
2. Il doit lui rester environ 20 € dans son porte-monnaie.

96 $A = \frac{9}{18} + \frac{2}{18} = \frac{11}{18}$; $B = \frac{4 \times 5}{11 \times 2} = \frac{2 \times 5}{11} = \frac{10}{11}$ et $C = \frac{9}{7} \times \frac{7}{3} = 3$.

97 $V = \pi \times 2{,}5^2 \times 9 = 56{,}25\pi\ \text{cm}^3$.
Donc $V \approx 176{,}71\ \text{cm}^3$ à $0{,}01\ \text{cm}^3$ près.

98 **a.** $x = 4$. **b.** $x = 2$. **c.** $x = 3$.

99 **a.** $x = 3$. **b.** $x = \frac{4}{9}$. **c.** $x = 75$. **d.** $x = -2,1$.

100 **1. b.** et **d.** **2. c.**

101 **a.** $x = \frac{9}{2}$. **b.** $x = 10$. **c.** $x = \frac{1}{8}$.

102 **a.** $x = -\frac{1}{2}$. **b.** $x = \frac{3}{2}$. **c.** $x = -\frac{9}{4}$.

103 **a.** $x = 6$ ou $x = -6$.
b. Il n'y a pas de solution car $-49 < 0$.
c. $x = \sqrt{15}$ ou $x = -\sqrt{15}$.

Pour aller plus loin

104 **1.** $200 \times 2 + 100 \times 6 + 100 \times 4 = 1\,400$.
Distance parcourue chaque jour : 1 400 mètres.
2. $500 \times 2 + 400 \times 6 + 200 \times 4 = 4\,200$.
Distance parcourue chaque jour : 4 200 mètres.
3. a. Si T est situé entre M et S, les distances étant exprimées en centaines de mètres, on a :
TM = x ; TS = 1 –x et TC = 3 –x
donc $f(x) = 2x + 6(1 - x) + 4(3 - x)$.
b. $f(x) = -8x + 18$.
4. Si T est situé entre S et C, on a TM = x ; TS = x – 1 et TC = 3 –x
donc $f(x) = 2x + 6(x - 1) + 4(3 - x)$ d'où $f(x) = 4x + 6$.
5. Si T est situé entre C et E, on a TM = x ; TS = x – 1 et TC = x – 3
donc $f(x) = 2x + 6(x - 1) + 4(x - 3)$ soit $f(x) = 12x - 18$.
6. a. Sur l'intervalle [0 ;1] f est décroissante, sur l'intervalle [1 ;3] f est croissante, et sur l'intervalle [3 ;5] f est croissante.
b. D'après la question précédente, la fonction f admet un minimum en x = 1, donc pour minimiser la distance parcourue chaque jour, le campeur doit planter sa tente en S.

105 **1.** Si $R \leqslant 10\,225$ alors l'impôt est égal à zéro.
2. Lorsque $10\,225 < R \leqslant 26070$, il y a 10 225 € qui sont imposé à 0 % et $(R - 10\,225)$ € qui sont imposé au taux de 11 %.
$I(R) = (R - 10\,225) \times 0{,}11 = 0{,}11R - 1\,124{,}75$.
3. a. $I(26\,070) = 0{,}11 \times 26\,070 - 1\,124{,}75 = 1\,742{,}95$.
b. Lorsque $26\,70 < R \leqslant 74\,545$, alors 26 070 € sont imposés pour un montant de 1 742,95 € puis $(R - 26\,070)$ € sont imposés au taux de 30 %.
Dans ce cas : $I(R) = 1\,742{,}95 + (R - 26\,070) \times 0{,}3 = 0{,}3R - 6\,078{,}05$.
4. a. $I(74\,545) = 0{,}3 \times 74\,545 - 6\,078{,}05 = 16\,285{,}45$.
b. Lorsque $74\,545 < R \leqslant 160\,336$, alors 74 545 € sont imposés pour un montant de 16 285,45 € puis $(R - 74\,545)$ € sont imposés au taux de 41 %.
Dans ce cas : $I(R) = 16\,285{,}45 + (R - 74\,545) \times 0{,}41 = 0{,}41R - 14\,278$.
5. Pour $160\,336 < R$, on a $I(R) = I(160\,336) + (R - 160\,336) \times 0{,}45$ donc :
$I(R) = 51459{,}76 + 0{,}45R - 72\,151{,}2 = 0{,}45R - 20\,691{,}44$.
6. a. Pour R = 70 000, le taux marginal d'imposition est 30 %.
b. $I(70\,000) = 0{,}3 \times 70\,000 - 6\,078{,}05 = 14\,921{,}95$.
c. $\frac{14\,921{,}95}{70\,000} \approx 0{,}213$ arrondi au millième.
Le taux moyen d'imposition est donc 21,3 %.

106 **1.** AMB est un triangle rectangle en A avec AB = 8 et AM = x donc l'aire $f(x)$ de AMB vérifie $f(x) = \frac{8 \times x}{2} = 4x$.
2. Le triangle DCN est rectangle en C avec DC = 8 et CN = x donc l'aire DCN est la même que celle du triangle AMB soit $4x$.

L'aide du rectangle ABCD est $6 \times 8 = 48$.

Ainsi l'aire $g(x)$ du parallélogramme DMBN est $g(x) = 48 - 4x - 4x = 48 - 8x$.

3. On résout l'inéquation $f(x) > \frac{1}{2}g(x)$ qui équivaut à $4x > 24 - 4x$ soit à $8x > 24$ donc à $x > 3$. Les valeurs de x pour lesquelles l'aire de AMB est supérieure à la moitié de l'aire de DMBN sont celles de l'intervalle $]3; 6]$.

4. $4x = 48 - 8x$ équivaut à $12x = 48$ donc à $x = 4$.

Les aires du triangle AMB et du parallélogramme DMBN sont égales si et seulement si le point M est placé tel que AM = 4.

107 **1.** $S_1 = 1$; $S_2 = 1 + 2 = 3$; $S_3 = 1 + 2 + 3 = S_2 + 3 = 6$ et $S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = S_3 + 6 = 10$.

2. $S_{13} = S_{12} + 13 = 78 + 13 = 91$.

3. $S_{n+1} = S_n + n + 1$.

4. a. $V_1 = S_1 - \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$; $V_2 = S_2 - \frac{1}{2} \times 2^2 = 3 - 2 = 1$; $V_3 = S_3 - \frac{1}{2} \times 3^2 = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$ et $V_4 = S_4 - \frac{1}{2} \times 4^2 = 10 - 8 = 2$.

b. On peut conjecturer que la suite (V_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

5. a. $V_{n+1} = S_{n+1} - \frac{1}{2}(n+1)^2$.

$V_{n+1} = S_n + n + 1 - \frac{1}{2}(n+1)^2$

b. $V_{n+1} = S_n + n + 1 - \frac{1}{2}(n+1)^2 = S_n + n + 1 - \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1)$

Donc $V_{n+1} = S_n + n + 1 - \frac{1}{2}n^2 - n - \frac{1}{2} = S_n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}$.

c. On a donc $V_{n+1} = V_n + \frac{1}{2}$ pour tout entier naturel non nul n. Donc la suite (V_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$

6. Comme la suite (V_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_1 = \frac{1}{2}$ donc pour tout entier naturel n non nul : $V_n = \frac{1}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n$.

7. Pour tout entier naturel n non nul, $S_n = V_n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n+n^2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

8. Il y aurait $S_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55$ boules de billard.

108 **1.** $v_1 = 1 - \frac{1}{v_0} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $v_2 = 1 - \frac{1}{v_1} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1$; $v_3 = 1 - \frac{1}{v_2} = 1 - \frac{1}{-1} = 1 + 1 = 2$ et $v_4 = 1 - \frac{1}{v_3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

2. On conjecture que Pour tout entier naturel n, $v_{n+3} = v_n$.

3. a. $v_{n+2} = 1 - \frac{1}{v_{n+1}}$ or $v_{n+1} = 1 - \frac{1}{v_n} = \frac{v_n - 1}{v_n}$ donc $v_{n+2} = 1 - \frac{v_n}{v_n - 1} = \frac{v_n - 1 - v_n}{v_n - 1} = \frac{-1}{v_n - 1}$.

b. $v_{n+3} = 1 - \frac{1}{v_{n+2}} = 1 - \frac{v_n - 1}{-1} = 1 + v_n - 1 = v_n$.

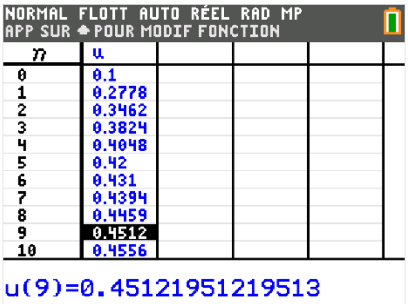
c. La conjecture est démontrée : quelle que soit la valeur de v_0 différente de 0 et de 1, pour tout entier naturel n, $v_{n+3} = v_n$.

109 **1.** $p_1 = \frac{1}{4-4p_0} = \frac{1}{4-0.4} = \frac{1}{3,6} \approx 0{,}278$ à 0,001 près.

Après une semaine d'observation environ 27,8% des perroquets sont contaminés.

2. a. On obtient $p_5 = 0{,}42$. Donc après 5 semaines d'observation, 42 % des perroquets sont contaminés.

b. À l'aide du mode suite, on détermine que c'est à partir de la 9e semaine d'observation qu'au moins 45 % des perroquets sont contaminés.

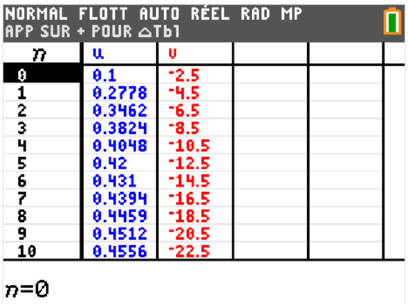


NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR ♣ POUR MODIF FONCTION

n	u
0	0.1
1	0.2778
2	0.3462
3	0.3824
4	0.4048
5	0.42
6	0.431
7	0.4394
8	0.4459
9	0.4512
10	0.4556

u(9)=0.45121951219513

3.



NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR ΔTbl

n	u	v
0	0.1	-2.5
1	0.2778	-4.5
2	0.3462	-6.5
3	0.3824	-8.5
4	0.4048	-10.5
5	0.42	-12.5
6	0.431	-14.5
7	0.4394	-16.5
8	0.4459	-18.5
9	0.4512	-20.5
10	0.4556	-22.5

n=0

On conjecture que la suite (v_n) est arithmétique de raison –2.

4. a. Pour tout entier naturel n, $2p_{n+1} - 1 = \frac{2}{4-4p_n} - 1 = \frac{2}{4-4p_n} - \frac{4-4p_n}{4-4p_n} = \frac{2-4+4p_n}{4-4p_n} = \frac{4p_n-2}{4-4p_n}$.

b. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{2}{2p_{n+1}-1}$ donc $v_{n+1} = \frac{2}{\frac{4p_n-2}{4-4p_n}} = \frac{2(4-4p_n)}{4p_n-2} = \frac{4-4p_n}{2p_n-1}$.

c. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \frac{4-4p_n}{2p_n-1} - \frac{2}{2p_n-1} = \frac{2-4p_n}{2p_n-1} = \frac{-2(2p_n-1)}{2p_n-1} = -2$.

La suite (v_n) est donc arithmétique de raison –2.

d. Le premier terme de la suite arithmétique (v_n) est $v_0 = -2{,}5$, donc $v_n = -2{,}5 - 2n$ pour tout entier naturel n.

On a alors $\frac{2p_n-1}{2} = \frac{1}{v_n}$ donc $2p_n - 1 = \frac{2}{v_n}$ d'où $p_n = \frac{1}{v_n} + \frac{1}{2}$ soit $p_n = \frac{1}{-2{,}5-2n} + \frac{1}{2}$ et

on obtient $p_n = \frac{-1}{2{,}5+2n} + \frac{1}{2}$ pour tout entier naturel n.

5. Comme pour tout entier naturel n, $\frac{-1}{2{,}5+2n}$ est négatif, on en déduit que $p_n < \frac{1}{2}$.

Selon ce modèle la proportion de la population contaminée ne dépassera pas 50 %, donc on ne peut pas envisager la contamination de la totalité de la population.

D Exposés

Exposé 1 Évolution de la population française

Des fichiers logiciels sont disponibles dans le manuel numérique enseignant, le manuel numérique élève et sur le site enseignant indice.editions-bordas.fr.

Un fichier tableur contenant l'effectif de la population française pourra être fourni aux élèves qui n'ont pas réussi à récupérer les données sur le site de l'Insee.

L'obtention d'un modèle peut se faire par différentes méthodes.

On pourra suggérer aux élèves de calculer plusieurs taux d'accroissement et d'en faire la moyenne.

Certains élèves peut à l'aise avec les calculs pourront obtenir un modèle à l'aide d'un tracé au jugé.

L'utilisation d'une courbe de tendance obtenue avec le tableur est également possible.

Exposé 2 L'échelle Fahrenheit

Les élèves pourront remarquer que la définition du degré Fahrenheit a légèrement évolué par rapport à la définition initiale. Puis après avoir établi les relations de conversion avec le degré Celsius, il pourra être intéressant d'établir les correspondances pour certaines température remarquables. Les connaisseurs évoqueront le roman de Ray Bradbury « Fahrenheit 451 » et feront ainsi un lien entre la littérature, les sciences-physique et les mathématiques.