Chapitre 5 Croissance exponentielle

A Notre point de vue

1 Les choix faits pour traiter le programme dans ce chapitre

Ce chapitre traite des fonctions exponentielles. Il est composé de deux séquences.

La première séquence est consacrée aux fonctions exponentielles de base *a*, fonctions introduites dans l'activité 1 où il s'agit de modéliser l'évolution d'une population de bactéries, d'abord à l'aide d'une suite géométrique, puis à l'aide d'une fonction que l'on construit comme prolongement à des valeurs non entières positives de cette suite géométrique.

La seconde séquence du chapitre est consacrée aux propriétés algébriques (introduites dans l'activité 3) et aux applications avec notamment le calcul d'un taux d'évolution moyen (introduit dans l'activité 4).

2 Les objectifs des activités

L'activité 1 permet d'introduire les fonctions exponentielles comme prolongements à des valeurs non entières de suites géométriques.

L'activité 2 permet de conjecturer, par lecture graphique, le sens de variation des fonctions exponentielles.

L'activité 3 a pour objectif de rappeler les propriétés des puissances entières, et de faire observer, sur quelques exemples, que ces propriétés restent vraies pour des puissances non entières.

L'activité 4 a pour objectif d'introduire le calcul d'un taux d'évolution moyen.

3 Exercices

Les exercices sont progressifs et variés, donnant l'occasion de travailler toutes les capacités liées à ce chapitre.

De nombreux exercices permettent d'utiliser les fonctions exponentielles dans des contextes variés. Les situations et problèmes proposés dans le programme sont traités de la manière suivante :

• Le calcul de la valeur, au bout d'une fraction d'annuité, d'un capital placé à intérêts composés est abordé dans l'exercice 25 ; et le calcul du nombre de noyaux radioactifs présents dans un échantillon dans les exercices 99 et 100.

• L'étude de l'évolution d'une population (exercices 29 et 95) peut être l'occasion de recherches sur Thomas Malthus et Pierre-François Verhulst, ainsi que sur les différents modèles d'évolution de la population mondiale. Avec l'étude de la propagation d'une rumeur (exercice 97), ces exercices peuvent faire l'objet de débats au sein de la classe. Les élèves peuvent s'interroger sur la pertinence du choix d'un modèle de croissance exponentielle dans ces situations, et sur les paramètres qu'il faudrait prendre en compte pour rendre ces modèles plus fidèles à la réalité.

B Se tester pour un bon départ

1 **1.** La raison de la suite (u_n) est 2.
La raison de la suite (v_n) est 0,5.
2. La croissance de la suite (u_n) est exponentielle.

2 **1.** Réponse **a.**
2. Réponse **d.**
3. Réponse **c.**

3 **1.** Réponses **a.** et **d.**
2. Réponses **a.** et **c.**
3. Réponses **b.** et **c.**

4 A = 3^9 ; B = 3^{10} et C = 3^4.

5 Le taux d'évolution est égal à : $\frac{22\ 000-20\ 000}{20\ 000}=0{,}1$, soit 10 %.

6 **a.** Faux.
Au bout d'un an, le capital disponible est égal à : $1\ 000\times1{,}03=1\ 030$ euros.

b. Vrai.
Le nouveau prix est égal à : $160\times0{,}75=120$ euros.

c. Faux.
Le nouveau prix est égal à $1{,}1^2 \times P$, soit $1{,}21 \times P$.

C Activités

Activité 1 Prolifération de bactéries

1. a. Pour tout entier naturel n, $c_n = 5 \times 1{,}16^n$.

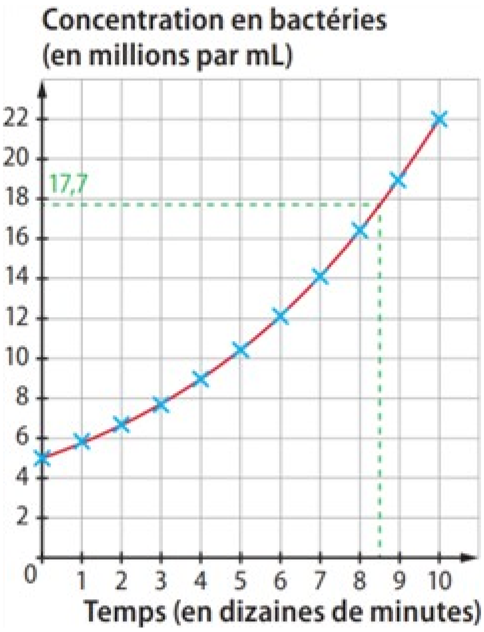
b. La suite (c_n) est croissante car sa raison est supérieure à 1.

c. $c_8 = 5 \times 1{,}16^8$, soit environ 16,4 à 0,1 près.

$c_9 = 5 \times 1{,}16^9$, soit environ 19 à 0,1 près.

Au bout de 80 minutes, il y a environ 16,4 millions de bactéries par millilitre, et au bout de 90 minutes, il y en a environ 19 millions par millilitre. Comme la suite (c_n) est croissante, au bout de 85 minutes, il y a entre 16,4 millions et 19 millions de bactéries par millilitre.

2. a. et **b.**



c. La fonction f semble croissante.

d. Au bout d’une heure et 25 minutes, c’est-à-dire 8,5 dizaines de minutes, il y a environ 17,7 millions de bactéries par millilitre (voir graphique).

Activité 2 Autour des variations

Des fichiers logiciels sont disponibles dans le manuel numérique enseignant, le manuel numérique élève et sur le site enseignant indice.editions-bordas.fr.

1. a. $f(1) = 2$; $g(1) = 0{,}8$; $h(1) = 0{,}5$ et $k(1) = 1{,}5$.

b. La fonction f est représentée par la courbe rouge.

La fonction g est représentée par la courbe bleue.

La fonction h est représentée par la courbe orange.

La fonction k est représentée par la courbe verte.

2. Par lecture graphique, les fonctions f et k sont croissantes ; les fonctions g et h sont décroissantes.

3. a. On conjecture que lorsque $a < 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est décroissante.

b. On conjecture que lorsque $a > 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est croissante.

Activité 3 Avec des exposants réels

1. a. $1{,}2^3 \times 1{,}2^{25} = 1{,}2^{28}$ car $a^n \times a^m = a^{n+m}$ où a est un réel et n et m deux entiers.

$(1{,}2^{32})^3 = 1{,}2^{96}$ car $(a^n)^m = a^{n \times m}$ où a est un réel et n et m deux entiers.

b.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
a^x	a^y	$a^x \times a^y$	a^{x+y}	$(a^x)^3$	a^{3x}
$3{,}1^{1{,}2}$	$3{,}1^{2{,}5}$	65,77	65,77	58,74	58,74
$4^{0{,}25}$	$4^{1{,}75}$	16	16	2,83	2,83
$7^{3{,}2}$	7^3	173 623,24	173 623,24	129 700 360,8	129 700 360,8
$0{,}2^{0{,}3}$	$0{,}2^{0{,}7}$	0,2	0,2	0,23	0,23

c. Les contenus des colonnes (3) et (4) sont identiques.

Les contenus des colonnes (5) et (6) sont identiques.

2. a. $\frac{1{,}2^{20}}{1{,}2^{11}} = 1{,}2^9$ car $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ où a est un réel et n et m deux entiers.

b. À 0,01 près, $\frac{5^{3{,}2}}{5^{1{,}7}} \approx$¿¿ 11,18 et $5^{1{,}5} \approx 11{,}18$.

3. Les propriétés sur les puissances entières semblent encore vraies pour des puissances non entières.

Activité 4 Fréquentation d'un parc de loisirs

1. a. $1{,}15 \times 1{,}2 \times 1{,}05 = 1{,}449$.

b. Le taux global d'augmentation entre 2017 et 2020 est de 44,9 %.

2. a. Après deux augmentations de taux t, le nombre initial de visiteurs est multiplié par $(1 + t)^2$.

Après trois augmentations de taux t, il est multiplié par $(1 + t)^3$.

b. Ces trois augmentations successives de taux t doivent conduire à une augmentation globale de 44,9 % donc $(1 + t)^3 = 1{,}449$.

3. a. $1 + t = \frac{1{,}449^{1}}{3}$, soit $1 + t \approx 1{,}1316$ (à 0,0001 près).

b. On en déduit que $t \approx 0{,}1316$, soit 13,16 % à 0,01% près.

4. a. $\frac{0{,}15+0{,}20+0{,}05}{3} \approx$¿¿ 0,1333.

La moyenne des trois taux d'augmentation est environ 13,33 % à 0,01 % près.

b. Le taux d'augmentation moyen n'est pas égal à la moyenne des taux d'augmentation.

.

D Exercices

Pour démarrer

1 Seule la fonction g définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $g(x) = 3^x$ permet de modéliser une croissance exponentielle.

2 Seule la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = 0{,}2^x$ permet de modéliser une croissance exponentielle.

3 À 0,01 près, $a \approx 1{,}44$; $b \approx 0{,}99$; $c \approx 0{,}49$ et $d \approx 1{,}08$.

4

x	0	0,25	0,5	0,75	1
$f(x)$	1	2,7	7,3	19,9	54

5 **1.** $p(0) = 22\,800$. À l'achat, le tracteur coûtait 22 800 €.

2. Trois ans et demi après l'achat, la valeur du tracteur est de 15 768 € (à l'euro près).

6 **1.** Le nombre d'habitants trouvé lors du recensement est égal à $f(0)$, soit 60 210 habitants.

2. a. 6 mois correspond à $\frac{1}{2}$ année.

b. $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 60\,809$ à l'unité près. Six mois après le recensement, il y a environ 60 809 habitants.

3. a. $\frac{1}{12}$ d'année représente 1 mois.

b. À l'unité près, $f\left(\frac{1}{12}\right) \approx 60\,309$ et $f\left(\frac{13}{12}\right) \approx 61\,516$.

c. Un mois après le recensement, il y a environ 60 309 habitants ; et 13 mois après le recensement, il y a environ 61 516 habitants.

7 **1.** Le volume d'eau restant dans l'aquarium au bout d'une semaine est égal à $v(1)$, soit 274,4 litres.

2. Au dixième près, $v\left(\frac{1}{7}\right) \approx 279{,}2$.

$\frac{1}{7}$ de semaine représente 1 jour.

Un jour après l'installation, il reste 279,2 litres d'eau dans l'aquarium (à 0,1 litre près).

8 **1.** La fonction f est croissante car $2{,}7 > 1$.

2. La fonction g est décroissante car $0 < 0{,}4 < 1$.

9 La fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$ car $2 > 1$.
La fonction g est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ car $0 < 0{,}3 < 1$.
La fonction h est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ car $0 < 0{,}9 < 1$.
La fonction k est croissante sur $[0 ; +\infty[$ car $1{,}2 > 1$.

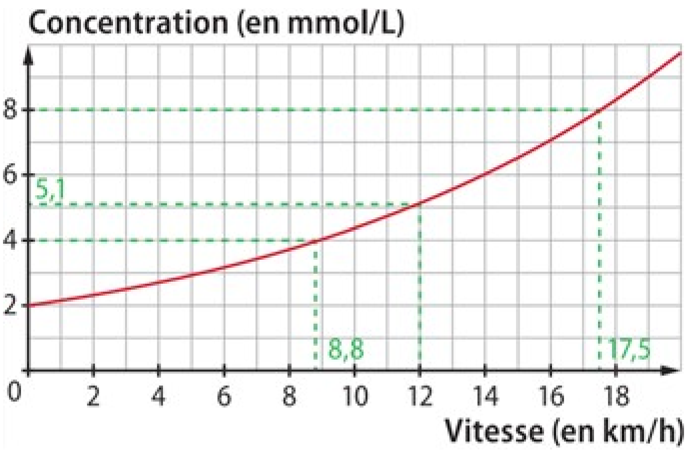
10 La fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$ car $1{,}3 > 1$.
La courbe qui représente f est donc $\mathcal{C}_2$.
La fonction g est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ car $0 < 0{,}7 < 1$.
La courbe qui représente g est donc $\mathcal{C}_1$.

11 **1.** La fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$ car $7 > 1$.
2. Comme 20 est positif, la fonction g a le même sens de variation que la fonction f.

12 **1.** Vrai, puisque $0 < 0{,}4 < 1$.
2. Faux. La fonction g a le même sens de variation que la fonction f car 100 est positif.
La fonction g est donc décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

13 **1.** On cherche l'image de 5 par la fonction f : $1{,}25^5 \approx 3$.
2. On cherche un antécédent de 5 par la fonction f : $1{,}25^x = 5$ pour $x \approx 7{,}2$.

14



1. Lorsque la vitesse d'Anaé est de 12 km/h, la concentration de lactate est d'environ 5,1 mmol/L.
2. La concentration de lactate est de 4 mmol/L lorsque la vitesse d'Anaé est d'environ 8,8 km/h.
3. À partir d'environ 17,5 km/h, la concentration de lactate dépasse 8 mmol/L.

15

x	4	4,1	4,2	4,3	4,4

$f(x)$	81	90,4	100,9	112,6	125,7

La fonction f étant croissante (car $3 > 1$), on peut dire que $f(x)$ est supérieur à 100 à partir de $x = 4,2$ (à 0,1 près).

16 **1.** La fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ car 25 > 1.

2.

x	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$f(x)$	125	172,5	238	328,3	453

3. La fonction f étant croissante, on peut dire que $f(x)$ est supérieur à 200 à partir de $x = 1{,}7$ (à 0,1 près).

17 **1.** Réponse **a.** En effet, $10^{2,5} \times 10^2 = 10^{2,5+2} = 10^{4,5}$.

2. Réponse **b.** En effet, $\dfrac{7^6}{7^{0,5}} = 7^{6-0,5} = 7^{5,5}$.

3. Réponse **b.** En effet, $\left(13^{0,5}\right)^2 = 13^{0,5\times 2} = 13^1 = 13$.

18 **1.** $a^4 \times a^{3,1} = a^{4+3,1} = a^{7,1}$

2. $a^{10} \times a^{0,5} = a^{10+0,5} = a^{10,5}$

3. $a^{20,8} \times a^2 = a^{20,8+2} = a^{22,8}$

19 **1.** $\dfrac{a^{3,7}}{a^3} = a^{3,7-3} = a^{0,7}$

2. $\dfrac{a^{12,9}}{a^7} = a^{12,9-7} = a^{5,9}$

3. $\dfrac{a^2}{a^{1,1}} = a^{2-1,1} = a^{0,9}$

20 **1.** $\left(a^{3,2}\right)^2 = a^{3,2\times 2} = a^{6,4}$

2. $\left(a^{0,1}\right)^6 = a^{0,1\times 6} = a^{0,6}$

3. $\left(a^{2,2}\right)^3 = a^{2,2\times 3} = a^{6,6}$

21 Six diminutions de taux t équivalent à une baisse globale de 3 %, donc $(1+t)^6 = 1 - 0{,}03$, soit $(1+t)^6 = 0{,}97$.

22 Réponse **b.**

Trois augmentations de taux t équivalent à une augmentation globale de 2 %, donc :

$(1+t)^3 = 1 + 0{,}02$, soit $(1+t)^3 = 1{,}02$.

Pour s'entraîner

23 Évolution 1. Chaque année, la population est multipliée par 1,01 (elle augmente de 1 %). Il s'agit d'un modèle de croissance exponentielle.

Évolution 2. Chaque année, la population augmente de 800 habitants. Il ne s'agit pas d'un modèle de croissance exponentielle, mais d'un modèle de croissance linéaire.

Évolution 3. Chaque année, la population diminue de 1%. Il s'agit d'un modèle de croissance exponentielle.

24 a. L'évolution de la population suit un modèle de croissance exponentielle.

b. L'évolution de la production de blé ne suit pas un modèle de croissance exponentielle, mais un modèle de croissance linéaire.

25 1. a. Chaque année, le capital acquis augmente de 1,5 %. Il est donc multiplié par 1 + 0,015, soit 1,015.

b. L'augmentation du capital acquis suit un modèle de croissance exponentielle.

2. $f(0)$ est le capital initial (en euros) donc $f(0) = 600$.

3. Réponse **c.** L'expression de f est $f(t) = 600 \times 1{,}015^t$.

4. Le capital acquis au bout de 5 ans et 6 mois est $f(5{,}5)$, soit environ 651,2 € à 0,01 euro près.

26 1. a. De 2017 à 2018, le nombre d'abonnés a diminué de 9,5 % car $\frac{181-200}{200}=-0{,}095$.

De 2018 à 2019, le nombre d'abonnés a diminué d'environ 10,5 % car $\frac{162-181}{181}\approx-0{,}105$.

De 2019 à 2020, le nombre d'abonnés a diminué d'environ 10,49 % car $\frac{145-162}{162}\approx-0{,}1049$.

b. On peut considérer que le nombre d'abonnés suit un modèle de croissance exponentielle car, chaque année, le nombre d'abonnés diminue d'environ 10 %.

2. Réponse **b.** Chaque année, le nombre d'abonnés diminue d'environ 10 %. Il est donc multiplié par environ 0,9. De plus, le nombre d'abonnés en 2017 était de 200 milliers. L'expression de f peut être $f(t) = 200 \times 0{,}9^t$.

27 1. $f(3) = 120 \times 0{,}87^3$, soit $f(3) \approx 79$ à 0,1 près.

Trois secondes après le pincement de la corde, la puissance du son émis est d'environ 79 watts.

2. $f(60) = 120 \times 0{,}87^{60}$, soit $f(60) \approx 0{,}0282$ à 0,0001 près.

Une minute après le pincement de la corde, la puissance du son émis est d'environ 0,0282 watts.

28 1. $f(0) = 30$. Au début de l'épisode de pollution, la concentration de la substance chimique était de 30 mg/L.

2. $f\left(\frac{1}{60}\right) \approx 29{,}97$ et $f\left(\frac{1}{3}\right)\approx 29{,}39$. Au bout d'une minute, la concentration de la substance chimique était d'environ 29,97 mg/L (à 0,01 mg/L près).

Et au bout de 20 minutes, elle était d'environ 29,39 mg/L (à 0,01 mg/L près).

3. $f\left(\frac{48}{60}\right) \approx 28,55$. Au bout de 48 minutes, la concentration de la substance chimique était d'environ 28,55 mg/L (à 0,01 mg/L près).

29 **1. a.**

Année	Population (en millions)	Taux d'augmentation (à 1% près)
1790	3,93	
1800	5,31	35 %
1810	7,24	36 %
1820	9,64	33 %
1830	12,87	34 %
1840	17,07	33 %

b. On peut considérer que l'évolution de la population des États-Unis entre 1790 et 1840 suit un modèle de croissance exponentielle, car, tous les 10 ans, la population augmente d'un taux presque constant.

2. a. $f(0) = 3,93$ et $f(5) \approx 16,98$ (à 0,01 près).

$f(0)$ est la population (en millions) en 1790. Elle correspond à celle donnée dans le tableau.

$f(5)$ est la population (en millions) estimée en 1840 (car $1790 + 5 \times 10 = 1840$). Cette valeur est très proche de celle donnée dans le tableau.

b. Entre 1790 et 2022, il s'est écoulé 232 ans, soit 23,2 dizaines d'années.

c. $f(23,2) = 3,93 \times 1,34^{23,2}$ soit environ 3 493,2 (à 0,01 près).

Selon ce modèle, la population des États-Unis en 2022 serait de 3 493,2 millions d'habitants.

Or elle est de 338, 3 millions. Ce modèle n'est pas réaliste !

30 La fonction f est décroissante car 100 est positif et $0 < 0,9 < 1$.

La fonction g est croissante car 0,1 est positif et $5 > 1$.

31 La fonction f est décroissante car 9 est positif et $0 < 0,6 < 1$.

La fonction g est croissante car 200 est positif et $1,05 > 1$.

32 La fonction f est croissante car $\frac{3}{2} > 1$.

La fonction g est décroissante car 10^3 est positif et $0 < 0,1 < 1$.

33 **1.** Le 1er janvier 2020, il y avait 332 tortues car $f(0) = 332$.

2. La fonction f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ car 332 est positif et $0 < 0,77 < 1$.

3. $f(10,5) \approx 21,3$ à 0,1 près. Selon ce modèle, à partir du 1er juillet 2030, il y aura moins de 21 tortues.

34 **1.** La fonction *f* est décroissante sur [0 ; 100] car 620 est positif et 0 < 0,96 < 1.

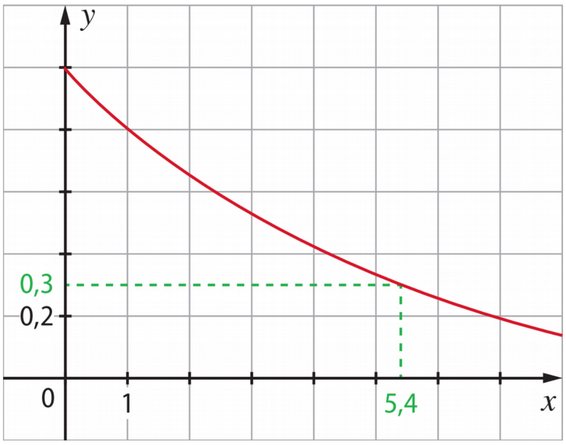
2. $f(24) \approx 233$ à l'unité près.

Il y a moins de 233 nourrissons de plus de six mois allaités maternellement.

35 **1.**

x	4	5	6	7	8
$f(x)$	0,41	0,33	0,26	0,21	0,17

2. et **3.**

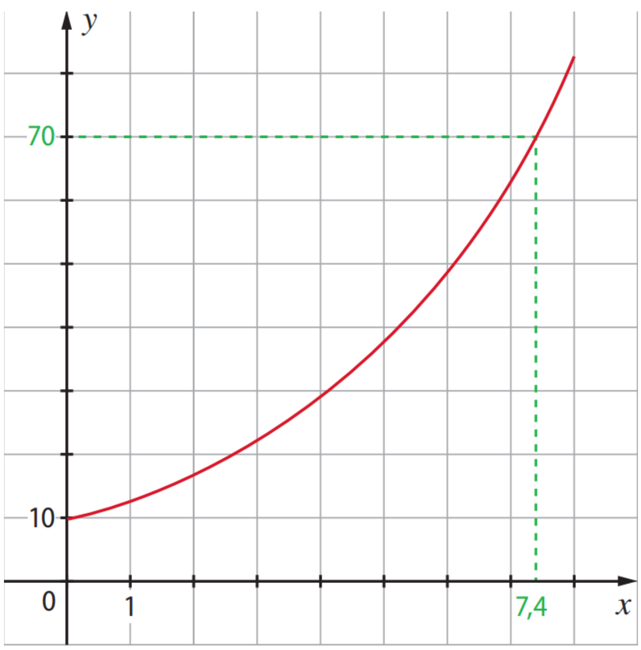


$f(x) = 0{,}3$ pour $x \approx 5{,}4$.

36 **1.**

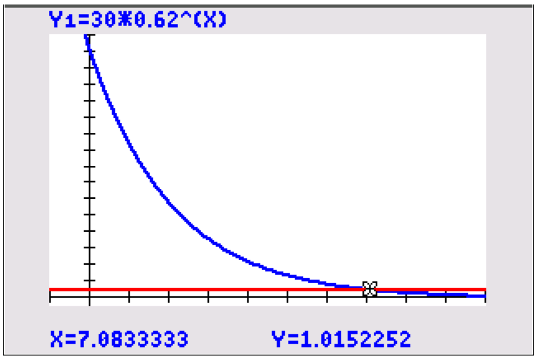
x	0	2	4	6	8
$f(x)$	10	16,9	28,6	48,3	81,6

2. et **3.**



L'équation $f(x) = 70$ a pour solution $x \approx 7{,}4$.

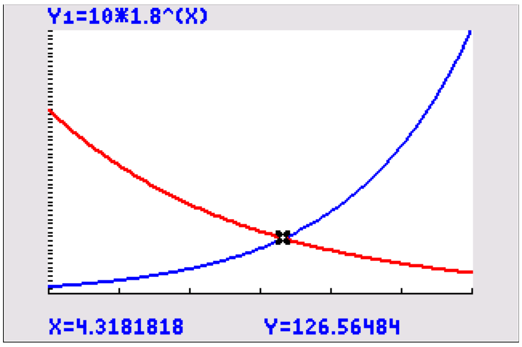
37 **1.** et **2.**



Une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 1$ est 7.

38 **1.** La fonction f est croissante ; la fonction g est décroissante.

2.

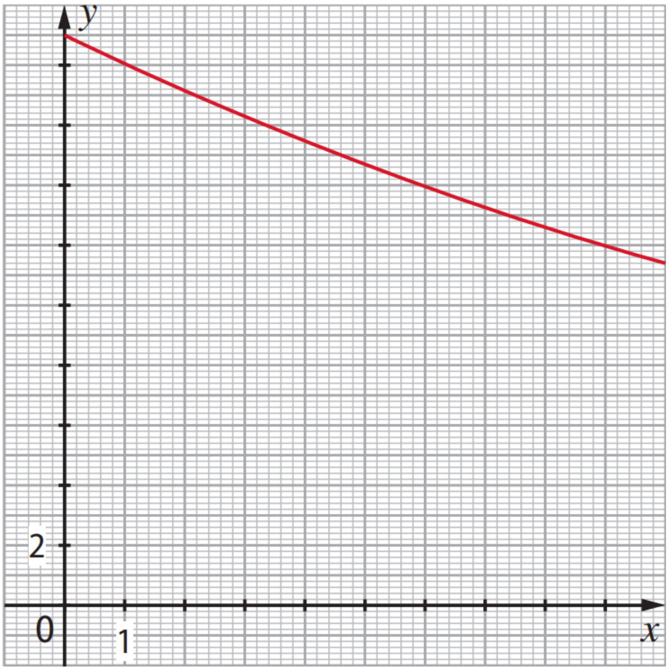


3. Une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est 4,3.

39 **1. a.**

t	0	2	5	8	10
***f*(*t*)**	19	17,1	14,7	12,6	11,4

b.

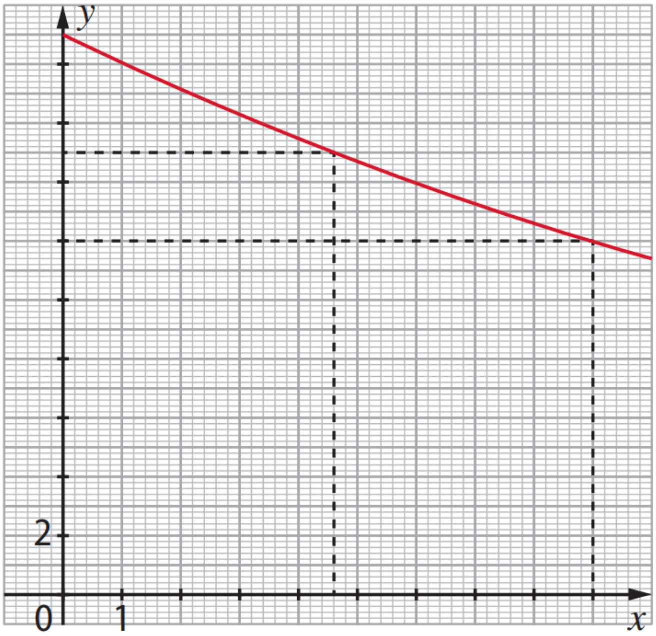

y
2
0
1
x

2. a. À l'arrêt du chauffage, la température est de 19 °C.

b. $f(2{,}5) \approx 16{,}7$ à 0,1 près.

Après deux heures et demie, la température est d'environ 16,7 °C (à 0,1°C près).

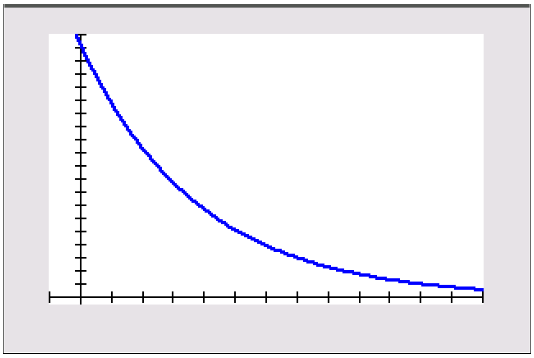
c.



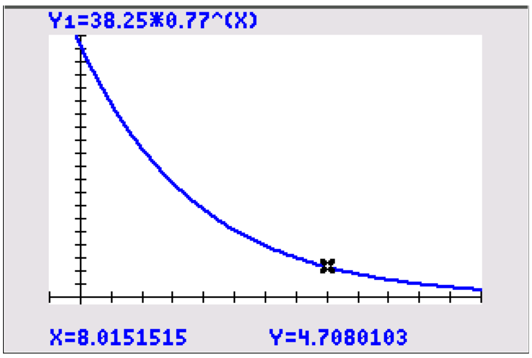
La température devient égale à 15 °C au bout d'environ 4 heures et demie.

Il faut environ 4 heures et demie pour passer de 15 °C à 12 °C.

40 **1.**

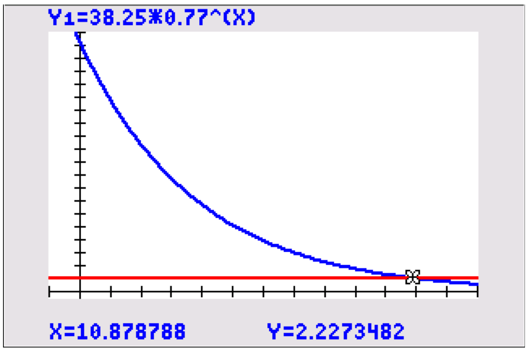


2. a.



Au bout de 8 heures, l’abricot contient environ 4,7 g d’eau. Cette masse étant supérieure à 2,25 g, l’abricot ne peut pas bénéficier de l’appellation « abricot sec ».

b.

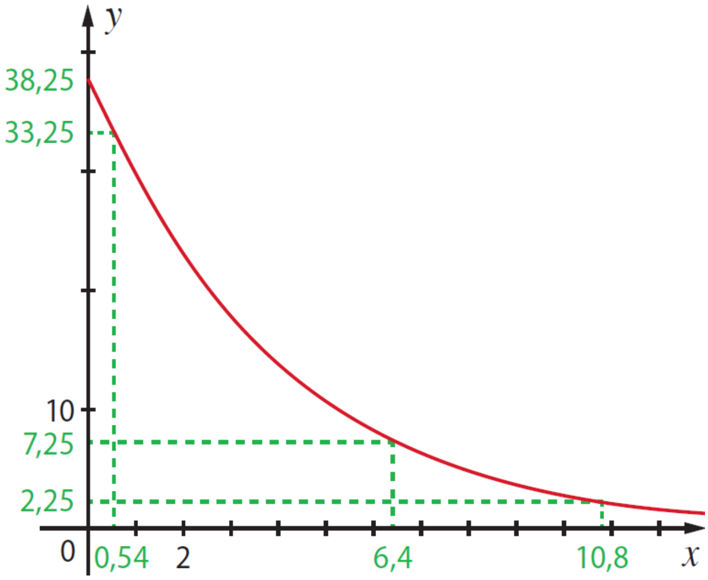


L’abricot peut bénéficier de l’appellation « abricot sec » au bout d’environ 10,8 heures, soit 10 heures et 48 minutes.

c. Pour éliminer les cinq premiers grammes d’eau, il faut environ 0,54 heure.

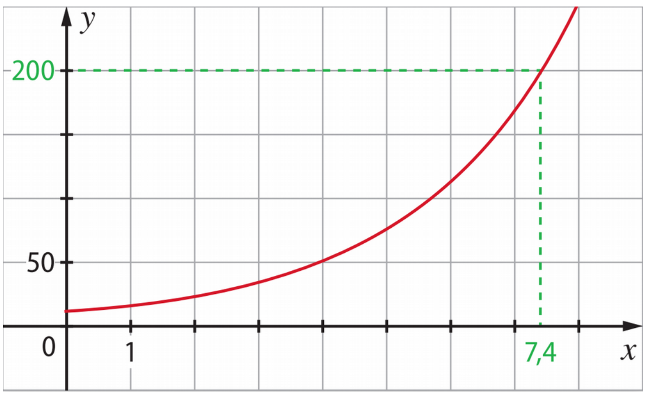
Pour éliminer les cinq derniers grammes d’eau, il faut environ 4,4 heures (10,8 – 6,4 = 4,4).

Il faut environ 8 fois moins de temps pour éliminer les cinq premiers grammes d’eau que pour éliminer les cinq derniers.



41 **1.** La fonction f est croissante car 10 est positif et 1,5 > 1.

2.



Par lecture graphique, $a \approx 7{,}4$.

3. La fonction f est croissante, $f(7{,}3) < 200$ et $f(7{,}4) > 200$. On en déduit que, à 0,1 près, $a \approx 7{,}4$.

42 **1.** La fonction f est décroissante car 50 est positif et $0 < 0{,}8 < 1$.

2. Comme f est décroissante et $f(5) > 16$, le nombre a est supérieur à 5.

3. À 0,01 près, $f(5{,}1) \approx 16{,}02$ et $f(5{,}2) \approx 15{,}67$.

La fonction f est décroissante, $f(5{,}1) > 16$ et $f(5{,}2) < 16$. On en déduit que, à 0,1 près, $a \approx 5{,}2$.

43 **1.** La fonction f est croissante car 100 est positif et $1{,}8 > 1$.

2. La fonction f est croissante, $f(9) < 20\,000$ et $f(10) > 20\,000$.

On en déduit que le plus petit entier n, tel que $f(x)$ est supérieur à 20 000 pour x plus grand que n, est égal à 10.

X	Y1
3	583.2
4	1049.8
5	1889.6
6	3401.2
7	6122.2
8	11020
9	19836
10	35705
11	64268
12	115683
13	208230

44 **1.** Comme 100 est positif et $0 < 0{,}65 < 1$, la fonction f est décroissante.

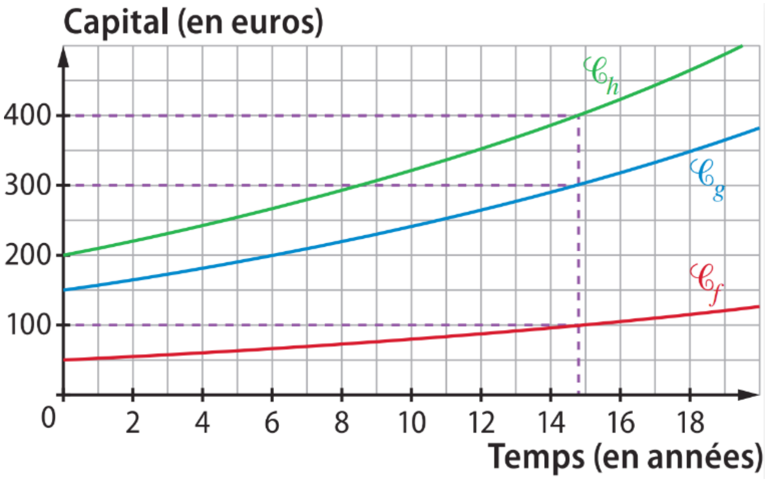
2. La fonction f est décroissante, $f(6) > 5$ et $f(7) < 5$.

On en déduit que le plus petit entier n, tel que $f(x)$ est inférieur à 5 pour x plus grand que n, est égal à 7.

X	Y1
0	100
1	65
2	42.25
3	27.463
4	17.851
5	11.603
6	7.5419
7	4.9022
8	3.1864
9	2.0712
10	1.3463

45 **1. a.** Le capital de Fannie double lorsqu'il est égal à 100 € ; celui de Gérard lorsqu'il est égal à 300 € ; et celui de Hakim, lorsqu'il est égal à 400 €.

Par lecture graphique, c'est au bout d'environ 14,8 ans.



b. C'est la même durée pour les trois placements.

2. a. On divise chaque membre de l'équation $C \times 1{,}048^x = 2 \times C$ par C.

b. Au bout de x années, le capital acquis est égal à $C \times 1{,}048^x$.

Ce capital est égal à $2 \times C$ si et seulement si $C \times 1{,}048^x = 2 \times C$. Ce qui équivaut à $1{,}048^x = 2$.

La solution de cette équation ne dépend pas de la valeur de C.

46 **1.** $S(0) = 0{,}2$.

Cela signifie que la taille initiale de l'échantillon est de 0,2 cm², soit 20 mm². Cela correspond bien à l'énoncé.

2. $S(17{,}5) \approx 2$ à l'unité près.

Au bout de 17,5 jours, la surface de peau sera d'environ 2 cm², au centimètre carré près.

3. Comme 0,2 est positif, la fonction S a le même sens de variation que la fonction $t \longmapsto 1{,}15^t$.

Elle est donc croissante car $1{,}15 > 1$.

4. Au dixième près, $S(26) \approx 7{,}6$ et $S(27) \approx 8{,}7$.

À un jour près, t_{Greffe} est égal à 27 jours.

Au dixième près, $S(26{,}25) \approx 7{,}8$ et $S(26{,}5) \approx 8{,}1$.

À six heures près, t_{Greffe} est égal à 26,5 jours.

La surface de peau à greffer devrait être suffisante au bout de 26 jours et demi (26 jours et 12 heures).

47 **1.** $f(1) = 30{,}48$: au bout de la première semaine d'observation, le taux d'incidence est égal à 30,48 cas pour 100 000 habitants.

2. La fonction f est croissante car 24 est positif et $1{,}27 > 1$.

3. Au dixième près, $f(3) \approx 49{,}2$ et $f(4) \approx 62{,}4$.

La fonction f est croissante, $f(3) < 60{,}96$ et $f(4) > 60{,}96$. On en déduit que le taux d'incidence dépassera le double du taux d'incidence observé au bout de la première semaine, c'est-à-dire 60,96 cas pour 100 000 habitants au bout de 4 semaines.

48 **1.** $N(0) = 1$.

Au début de la pasteurisation, il y a 1 million de germes.

2. La fonction N est décroissante car $0 < 0{,}98 < 1$.

3. 50 000 = 0,05 million.

On exécute les instructions dans la boucle while tant que le nombre de germes (contenu dans la variable **n**) est supérieur ou égal à 0,05.

Réponse **c.**

4. 149 secondes = 2 minutes et 29 secondes.

Le nombre de germes devient inférieur à 50 000 après 2 minutes et 29 secondes de pasteurisation.

49 $A = 2^{3 + 8{,}2} = 2^{11{,}2}$ et $B = 7^{8{,}2 + 1} = 7^{9{,}2}$

50 $A = 10^{2{,}8 - 2{,}2} = 10^{0{,}6}$ et $B = \dfrac{0{,}5^{10}}{0{,}5^{1{,}2+0{,}8}} = \dfrac{0{,}5^{10}}{0{,}5^{2}} = 0{,}5^8$

51 $A = 0{,}7^{2{,}5 \times 5} \times 0{,}7^3 = 0{,}7^{12{,}5 + 3} = 0{,}7^{15{,}5}$ et $B = \dfrac{11^{1{,}2 \times 4}}{11^{0{,}3}} = 11^{4{,}8 - 0{,}3} = 11^{4{,}5}$

52 $A = 12^{0,5} \times 12^{2,5-0,5} = 12^{2,5}$ et $B = \left(3^{1,2-0,2}\right)^7 = 3^{1 \times 7} = 3^7$

53 $A = 11^{7,5+2,25+2} = 11^{11,75}$ et $B = \dfrac{6^{6,1}}{6^5} = 6^{6,1-5} = 6^{1,1}$

54 $A = 5^3$ et $B = 5^{1+2,4} = 5^{3,4}$

55 Pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{207^{5,5} \times 207^{x+5}}{207^{x+0,5}} = \frac{207^{5,5+x+5}}{207^{x+0,5}}$$

$$= 207^{10,5+x-(x+0,5)}$$

$$= 207^{10,5+x-x-0,5}$$

$$= 207^{10}.$$

56 Pour tout réel t strictement positif,

$$\left(1,5^{t+0,5}\right)^4 \times 1,5^t = 1,5^{4(t+0,5)} \times 1,5^t$$

$$= 1,5^{4t+2} \times 1,5^t$$

$$= 1,5^{4t+2+t}$$

$$= 1,5^{5t+2}$$

57 Pour tout réel x strictement positif,

$$19 \times \left(19^{0,2x+1}\right)^{10} = 19 \times 19^{10(0,2x+1)}$$

$$= 19^1 \times 19^{2x+10}$$

$$= 19^{2x+11}$$

58 **1. a.** Pour tout réel x positif, $f(x+1) = 70 \times 2^{x+1}$.
Or $2^{x+1} = 2^x \times 2^1 = 2^x \times 2$ donc $f(x+1) = 70 \times 2^x \times 2$.
b. Comme $70 \times 2^x = f(x)$, on en déduit que $f(x+1) = f(x) \times 2$, soit $f(x+1) = 2f(x)$.
2. $f(4,4) = f(3,4+1)$. D'après la question précédente, $f(4,4) = 2f(3,4)$ donc $f(4,4) \approx 1\,478$.

59 **1. a.** Pour tout réel x positif, $f(x+1) = k \times 0,5^{x+1}$.
Or $0,5^{x+1} = 0,5^x \times 0,5$ donc $f(x+1) = k \times 0,5^x \times 0,5$.
b. Comme $k \times 0,5^x = f(x)$, on en déduit que $f(x+1) = f(x) \times 0,5$, soit $f(x+1) = 0,5f(x)$.

2. $f(2{,}4) = f(1{,}4 + 1)$.

D'après la question précédente, $f(2{,}4) = 0{,}5f(1{,}4)$ donc $f(2{,}4) = 1{,}25$.

$f(3{,}4) = f(2{,}4 + 1)$.

D'après la question précédente, $f(3{,}4) = 0{,}5f(2{,}4)$ donc $f(3{,}4) = 0{,}625$.

60 **1.** $f(0) = 200$. Initialement, il y a 200 bactéries par mL.

2. $f(t+1) = 200 \times 1{,}15^{t+1} = 200 \times 1{,}15^{t} \times 1{,}15 = f(t) \times 1{,}15$, soit $f(t+1) = 1{,}15f(t)$.

3. Toutes les heures, le nombre de bactéries par mL est multiplié par 1,15.

Une heure plus tard, il y aura donc environ 629 bactéries par mL car $547 \times 1{,}15 = 629{,}05$.

61 **1.** La fonction f est croissante car 50 est positif et $1{,}0355 > 1$.

2. a. Pour tout réel t positif, $f(t+20) = 50 \times 1{,}0355^{t+20}$.

Or $1{,}0355^{t+20} = 1{,}0355^{t} \times 1{,}0355^{20}$ donc $f(t+20) = 50 \times 1{,}0355^{t} \times 1{,}0355^{20}$.

b. Comme $50 \times 1{,}0355^{t} = f(t)$, on en déduit que $f(t+20) = f(t) \times 1{,}0355^{20}$.

c. $1{,}0355^{20} \approx 2$ à 0,1 près.

3. On déduit de la question précédente que, pour tout réel t positif, $f(t+20) \approx 2f(t)$.

Ainsi, toutes les 20 minutes, le nombre de bactéries double. Le temps de génération est donc de 20 minutes.

62 **1.** Réponse **d.**

2. Réponse **a.**

63 **a.** La solution est $\frac{352^{1}}{12}$, soit 1,6 au dixième près.

b. $x^9 - 2 = 171$ équivaut à $x^9 = 173$. La solution est $\frac{173^{1}}{9}$, soit 1,8 au dixième près.

64 **a.** $3x^6 = 930$ équivaut à $x^6 = 310$. La solution est $\frac{310^{1}}{6}$, soit 2,6 au dixième près.

b. $50x^{25} = 9\,000$ équivaut à $x^{25} = 180$. La solution est $\frac{180^{1}}{25}$, soit 1,2 au dixième près.

65 **a.** $\frac{1}{3}x^7 = 122$ équivaut à $x^7 = 366$. La solution est $\frac{366^{1}}{7}$, soit 2,3 au dixième près.

b. $\frac{1}{4}x^{11} = 25$ équivaut à $x^{11} = 100$. La solution est $\frac{100^{1}}{11}$, soit 1,5 au dixième près.

66 **a.** $(x+1)^7 = 780$ équivaut à $x + 1 = \frac{780^{1}}{7}$ et donc à $x = \frac{780^{1}}{7} - 1$.

La solution est $\frac{780^{1}}{7} - 1$, soit 1,6 au dixième près.

b. $(x-1)^7 = 780$ équivaut à $x - 1 = \frac{780^{1}}{7}$ et donc à $x = \frac{780^{1}}{7} + 1$.

La solution est $\frac{780^{1}}{7} + 1$, soit 3,6 au dixième près.

67 **1.** $g(10) = 500 \times a^{10}$ et on sait que $g(10) = 100$ donc $500 \times a^{10} = 100$.

Ceci équivaut à $a^{10} = \frac{100}{500}$, soit $a^{10} = 0{,}2$.

2. $a = \frac{0{,}2^{1}}{10}$, soit 0,85 au centième près.

68 **1.** La quantité de médicament présent dans le sang au bout de 5 heures est de 2 cm^3 donc $f(5) = 2$. On en déduit que $4 \times a^5 = 2$.

Ceci équivaut à $a^5 = \frac{2}{4}$, soit $a^5 = 0{,}5$.

2. $a = \frac{0{,}5^{1}}{5}$, soit 0,87 au centième près.

3. $f(6) = 4 \times a^6$ avec $a = \frac{0{,}5^{1}}{5}$. Donc $f(6) = 4 \times \frac{0{,}5^{6}}{5}$, soit environ 1,74 cm^3.

69 **1.** $120\,000 \times 1{,}35 = 162\,000$.

Achille aura besoin de 162 000 €.

2. a. Après 10 augmentations successives de taux t, le capital acquis est égal à :

$120\,000 \times (1 + t)^{10}$.

Achille souhaite que ce capital soit de 162 000 donc $120\,000 \times (1 + t)^{10} = 162\,000$, ce qui est équivalent à $(1 + t)^{10} = 1{,}35$.

b. $(1 + t)^{10} = 1{,}35$ équivaut à $1 + t = \frac{1{,}35^{1}}{10}$ et donc à $t = \frac{1{,}35^{1}}{10} - 1$.

Par conséquent, à 0,01 % près, $t \approx 3{,}05$ %.

70 **1.** Vrai.

Trois augmentations de taux t équivalent à une augmentation globale de 6% donc $(1 + t)^3 = 1{,}06$.

Par conséquent, $1 + t = \frac{1{,}06^{1}}{3}$.

Le taux d'évolution mensuel moyen est : $\frac{1{,}06^{1}}{3} - 1 \approx 0{,}0196$ soit une augmentation de 1,96 % à 0,01 % près.

2. Faux.

Douze augmentations de taux t équivalent à une augmentation globale de 19% donc :

$(1 + t)^{12} = 1{,}19$. Par conséquent, $1 + t = \frac{1{,}19^{1}}{12}$.

Le taux d'augmentation moyen mensuel est : $\frac{1{,}19^{1}}{12} - 1 \approx 0{,}0146$ soit une augmentation de 1,46 % à 0,01 % près.

3. Vrai.

Sept diminutions de taux t équivalent à une diminution globale de 34% donc $(1 + t)^7 = 0{,}66$. Par conséquent, $1 + t = \frac{0{,}66^{1}}{7}$.

Le taux de diminution moyen journalier est : $\frac{0{,}66^{1}}{7} - 1 \approx -0{,}0576$ soit une diminution de 5,76 % à 0,01 % près.

71 Onze augmentations de taux t équivalent à une augmentation globale de 67% donc :

$(1 + t)^{11} = 1{,}67$. Par conséquent, $1 + t = \frac{1{,}67^{1}}{11}$.

Le taux d'augmentation moyen mensuel est : $\frac{1{,}67^{1}}{11} - 1$ ≈ 0,0477 soit une augmentation de 4,77 % à 0,01 % près.

72 Douze diminutions de taux *t* équivalent à une diminution globale de 4,5% donc $(1 + t)^{12} = 0{,}955$. Par conséquent, $1 + t = \frac{0{,}955^1}{12}$.

Le taux de diminution moyen mensuel est : $\frac{0{,}955^1}{12} - 1 \approx -$¿0,0038 soit une baisse de 0,38 % à 0,01 % près.

73 **1.** $\frac{112 - 162}{162} \approx -0{,}309$.

Entre 2000 et 2018, les émissions moyennes de CO_2 des véhicules neufs ont diminué de 30,9 % à 0,1% près.

2. Dix-huit diminutions de taux *t* équivalent à une diminution globale de 30,9% (à 0,1% près) donc $(1 + t)^{18} = 0{,}691$. Par conséquent, $1 + t = \frac{0{,}691^1}{18}$.

Le taux d'évolution moyen annuel est : $\frac{0{,}691^1}{18} - 1 \approx -$¿0,0203

soit une baisse de 2 % à 0,1 % près.

74 **1.** $1{,}0052 \times 1{,}0042 \times 1{,}0031 \approx 1{,}0126$ à 0,0001 près.

Entre 2018 et 2021, la population française a augmenté de 1,26 % à 0,01% près.

2. Trois augmentations de taux *t* équivalent à une augmentation globale de 1,26% (à 0,01% près) donc $(1 + t)^3 = 1{,}0126$. Par conséquent, $1 + t = \frac{1{,}0126^1}{3}$.

Le taux d'évolution moyen annuel est : $\frac{1{,}0126^1}{3} - 1 \approx 0{,}00418$ soit une augmentation de 0,42 % à 0,01 % près.

75 **1.** $1{,}0488 \times 1{,}1105 \approx 1{,}1647$ à 0,0001 près.

Entre 2018 et 2020, la part des énergies renouvelables a augmenté de 16,47 % à 0,01% près.

2. Deux augmentations de taux *t* équivalent à une augmentation globale de 16,47% (à 0,01% près) donc $(1 + t)^2 = 1{,}1647$. Par conséquent, $1 + t = \frac{1{,}1647^1}{2}$.

Le taux d'évolution moyen annuel est : $\frac{1{,}1647^1}{2} - 1 \approx 0{,}0792$ soit une augmentation de 7,92 % à 0,01 % près.

Pour faire le point

76 **1.** Vrai.

2. Vrai.

3. Faux.

4. Vrai.

77 **1.** Vrai.

2. Faux.

3. Vrai.

4. Vrai.

78 **1.** A, B et C

2. B et C

79 **1.** A

2. B

3. A

80 **1.** Faux.

2. Faux.

3. Vrai.

Automatismes

81 Grandeurs en jeu : vitesse d'atterrissage et distance de freinage.

Unités : la vitesse d'atterrissage est exprimée en km/h ; la distance de freinage est exprimée en mètres.

82 **1.** 3 000 mètres. **2.** 350 km/h.

83 Elle est supérieure à 200 km/h.

84 Moins de 500 mètres.

85 **a.** 112,5 g. **b.** 2,5 €.
c. 1 L. **d.** 18 kg.

86 66,4 × 1,05 = 69,72. Un stère de bois coûte désormais 69,72 €.

87 **1.** $\frac{810}{1\ 500}=$¿¿ 0,54. 54 % des inscrits ont voté.

2. $\frac{9}{810}\approx$¿¿ 0,0111. Environ 1,11 % des bulletins sont blancs ou nuls.

3. $\frac{801}{1\ 500}=$¿¿ 0,534. 53,4 % des inscrits se sont exprimés (ont mis un bulletin ni blanc, ni nul).

88 **1.** 120 × 0,8 = 96. Le nouveau prix est 96 €.
2. Le premier commerçant.
3. $\frac{1}{0{,}8}=1{,}25$. Il devra pratiquer une augmentation de 25 %.

89 **1.** Vrai.
2. Faux. Il n'y a pas de solution car – 25 < 0.
3. Faux. Il y a deux solutions : – 1 et 1.

90 **a.** Solution : 10. **b.** Solution : 3.
c. Solution : 2. **d.** Solution : $\frac{-4}{3}$.

91 **a.** Il y a deux solutions : –25 et 25.
b. Il y a deux solutions : –100 et 100.
c. Il n'y a pas de solution.

92 **a.** Solution : 2. **b.** Solution : 2,25. **c.** Solution : –36.

d. Solution : 121. **e.** Solution : 1. **f.** Solution : $\frac{7}{6}$.

93 **1.** Réponse **b.** **2.** Réponse **a.**

94 $A(x) = 6 + 2x$ $B(x) = x^2 + 5x$

$C(x) = x^2 + x - 2$ $D(x) = 35x - 15x^2$

Pour aller plus loin

95 **1.**

Année	1798	1823	1848	1873	1898
Population	11	22	44	88	176
Nourriture	11	22	33	44	55

2. Selon Malthus :

a. La population est multipliée par 2 tous les 25 ans.

b. Les ressources peuvent alimenter 11 millions d'habitants supplémentaires tous les 25 ans.

3. a. Entre 1798 et 2023, il s'est écoulé 225 ans, soit 9 quarts de siècle.

b. $f(9) = 11 \times 2^9 = 5\ 632$.

Selon ce modèle, en 2023, la population de la Grande-Bretagne serait de 5 632 millions d'habitants. La population actuelle est de 63,7 millions. Ce modèle n'est pas réaliste !

96 On note C le capital placé (en euros).

$C \times 1{,}02^{5{,}25} = 4\ 000$.

$C = \dfrac{4\ 000}{1{,}02^{5{,}25}}$ donc $C \approx 3\ 605$ au dixième près.

97 **1.** Au bout d'une heure, quatre personnes sont au courant : Mathilde et ses trois amis.

Au bout de deux heures, 16 personnes sont au courant car $4 + 4 \times 3 = 16$.

2. a. Au bout de n heures, u_n personnes sont au courant.

Dans l'heure qui suit, chacune de ces u_n personnes en informe trois nouvelles.

Le nombre total de personnes au courant au bout de $n + 1$ heures est donc : $u_{n+1} = u_n + 3u_n$.

b. On a : $u_{n+1} = u_n + 3u_n = 4u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 1$.

c. Pour tout entier naturel n, $u_n = 4^n$.

d. $u_5 = 4^5 = 1\ 024$.

Au bout de 5 heures, 1 024 personnes sont au courant.

3. a. En prolongeant cette suite à des valeurs non entières positives, on obtient la fonction N.

$N(10{,}5) = 2\ 097\ 152$.

10 h 30 min après le lancement de la rumeur, 2 097 152 personnes sont au courant.

b. $N(9 + \frac{57}{60}) \approx 978\ 356$ à l'unité près.

$N(9 + \frac{58}{60}) \approx 1\ 001\ 224$ à l'unité près.

Au bout de 9 h 58 min, un million de personnes seront au courant de la rumeur.

c. On peut observer la rapidité avec laquelle une rumeur se propage. Mais on peut s'interroger, par exemple, sur le fait que selon ce modèle :

- les personnes nouvellement informées sont toutes différentes ;
- les personnes à l'origine de la rumeur continuent à la diffuser « au même rythme », etc.

98 **1.** $v(0) = 420$.

La vitesse initiale des vents est de 420 km/h.

2. La fonction v est décroissante car 420 est positif et $0 < 0{,}28 < 1$.

3. Pour tout réel t positif,

$$v\left(t+\frac{1}{12}\right)=420\times 0{,}28^{t+\frac{1}{12}}$$

$$¿\,\frac{420\times 0{,}28^{t}\times 0{,}28^{1}}{12}$$

Comme $420\times 0{,}28^{t}=v(t)$, on a : $v\left(t+\frac{1}{12}\right)=v(t\,\frac{)\times 0{,}28^{1}}{12}$.

4. À 0,1 près, $\frac{0{,}28^{1}}{12}$ $\approx 0{,}9$.

On en déduit que $v\left(t+\frac{1}{12}\right)\approx 0{,}9\,v(t)$.

Tous les 1/12ème d'heure, c'est-à-dire toutes les 5 minutes, la vitesse des vents est multipliée par environ 0,9.

Cela correspond bien à une diminution de 10 %.

99 **1.** $f(0) = 2\ 000$.

L'activité initiale de l'iode est de 2 000 becquerels.

2. L'activité est de 1 000 becquerels au bout d'environ 14 heures. Donc $T \approx 14$ heures.

3. Toutes les 13,5 heures, l'activité de l'iode 123 diminue de moitié.

Au bout de 27 heures, elle a donc été divisée par 4.

Et au bout de 54 heures, elle a été divisée par 16.

Pour l'échantillon considéré :

- au bout de 27 heures, l'activité de l'iode 123 est de 500 becquerels ;
- au bout de 54 heures, elle est de 125 becquerels.

4. $f(6{,}75) \approx 1\ 414{,}7$ à 0,1 près.

$$\frac{1\ 414{,}7-2\ 000}{2\ 000}=¿¿\ -0{,}29265.$$

Au bout de la moitié d'une demi-vie, l'activité de l'iode 123 a bien diminué d'environ 29,3 %.

5. $f(3{,}375) \approx 1\ 682{,}1$ à 0,1 près.

$$\frac{1\ 682{,}1-2\ 000}{2\ 000}=¿¿\ -0{,}15895.$$

Au bout d'un quart d'une demi-vie, l'activité de l'iode 123 a diminué d'environ 15,9 %.

100 **1.** La fonction f est décroissante car 13,5 et positif et $0 < 0{,}8834 < 1$.

2. $f(8) \approx 5{,}007$ au millième près. On peut bien estimer que les fragments d'os ont 8 000 ans.

3. a. Comme on souhaite connaître l'âge à 100 ans près, c'est-à-dire à 0,1 millier d'année près, on complète la ligne 6 avec l'instruction : t = t + 0.1.

b. Après 46,9 milliers d'années, soit 46 900 ans, on ne peut plus raisonnablement dater un organisme à l'aide du carbone 14.

101 **1.** $\frac{10\ 228\ 270}{712\ 250} \approx 14{,}36$ à 0,01 près.

Entre le 1er janvier 2015 et le 1er janvier 2021, c'est-à-dire en 6 ans, il y a eu une augmentation d'environ 1 336 % (à 1 % près).

$(1 + t)^6 = 14{,}36$ équivaut à $t = \frac{14{,}36^{1}}{6} - 1$, soit $t \approx 0{,}56$ à 0,01.

Le taux d'augmentation annuel moyen est de 56% à 1% près.

2. Réponse **c.**

3. $f(15) \approx 561\ 696$ à l'unité près.

Selon ce modèle, le 1er janvier 2030, il y aura 561 696 000 voitures électriques ou hybrides dans le monde.

4. La fonction f est croissante, $f(16{,}25) < 1\ 000\ 000$ et $f(16{,}5) > 1\ 000\ 000$, donc il y aura plus de 1 milliard de voitures électriques ou hybrides dans le monde à partir du 1er juillet 2031 (début du 3e trimestre).

E Exposés

Exposé 1 Invasion de lapins en Australie

L’élève peut calculer le taux d’augmentation moyen annuel du nombre de lapins entre 1859 et 1901.

Il en déduira l’expression d’une fonction qui répond au problème posé.

Exposé 2 Réduction des émissions de gaz à effet de serre

La réduction moyenne annuelle sur la période allant de 1990 à 2018 est donnée dans l’énoncé.

Elle permet de proposer l’expression d’une fonction qui modélise les émissions de GES t années après 1990.

Il s’agira ensuite de calculer quelles seront, selon ce modèle, les émissions de GES en 2030, et de les comparer à celles de 1990.