Chapitre 6
Variations d'une fonction

A Notre point de vue

1 Les choix faits pour traiter le programme dans ce chapitre

Ce chapitre traite des variations d'une fonction : variation instantanée (nombre dérivé) et variation globale (fonction dérivée). Il est composé de deux séquences.

La première séquence est principalement consacrée aux notions de tangente et de nombre dérivé.

La deuxième séquence est consacrée au calcul de fonctions dérivées (pour des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3) et au lien entre le signe de la fonction dérivée d'une fonction et les variations de cette fonction.

2 Les objectifs des activités

L'activité 1 permet d'introduire le nombre dérivé. Après avoir mis en évidence par des zooms successifs que la courbe de l'activité a localement (autour du point A) l'apparence d'une droite, l'utilisation d'un logiciel de géométrie permet d'introduire la tangente comme position limite des sécantes passant par le point A, et le nombre dérivé comme coefficient directeur de cette tangente.

L'activité 2 permet d'introduire le nombre dérivé en considérant la vitesse instantanée d'un mobile à un instant donné.

L'activité 3 permet de découvrir le lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée et ce, à partir du signe du coefficient directeur de tangentes à la courbe en différents points.

L'activité 4 permet de traiter un problème d'optimisation.

3 Exercices

Les exercices sont variés, donnant l'occasion de travailler toutes les capacités liées à ce chapitre, allant de l'interprétation du nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente à l'étude des variations d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à trois.

De nombreux exercices permettent d'utiliser la dérivation dans des contextes variés.

En particulier, les situations et problèmes proposés dans le programme sont traités dans les exercices suivants :

• en Sciences de la vie : courbe de croissance d'un enfant (exercice 59) ;

• en Physique : vitesse instantanée d'un mobile (exercice 33) ;

• en Chimie : vitesse d'apparition ou de disparition d'un produit (exercice 35) ;

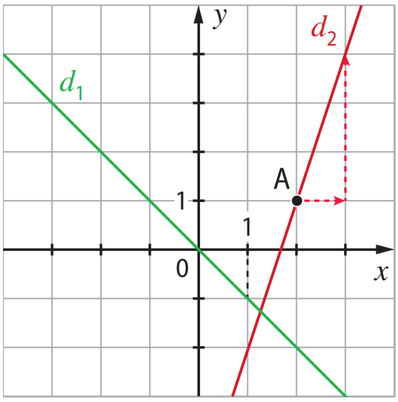
• en Économie : coût marginal (exercice 34) ; modélisation par une fonction du coût de production, du chiffre d'affaires et du bénéfice (exercice 101) ; optimisation des dimensions d'un emballage (exercice 83).

B Se tester pour un bon départ

1 **a.** Vrai. **b.** Vrai. **c.** Faux.

2 **1.** Réponse **a.** **2.** Réponse **d.**

3



4 **1.** L'image de 2 par f est –3.

2. $f(-1) = 0$.

3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ est [–1 ; 3].

4. Le minimum de f est égal à –4. Il est atteint en $x = 1$.

5.

x	–2	1	4
$f(x)$	5 ↘	–4	↗ 5

5 **1.** Réponse **b.** **2.** Réponse **c.**

6 **1.** $5x + 3 < 0$ équivaut à $5x < -3$ donc à $x < -\frac{3}{5}$.

L'ensemble des solutions est $]-\infty\ ;\ -\frac{3}{5}[$.

2. $100 - 4x \geqslant 0$ équivaut à $-4x \geqslant -100$ donc à $x \leqslant 25$.

L'ensemble des solutions est $]-\infty\ ;\ 25]$.

3. Lorsque x appartient à [0 ; 10], $2x \geqslant 0$ donc $2x + 3 \geqslant 3$.

On en déduit que $2x + 3$ est positif.

7 **1.** $(2x + 4)(1 - x) = 2x - 2x^2 + 4 - 4x$

$= -2x^2 - 2x + 4$

$= g(x)$

2. a.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. $g(x)$ est positif sur $[-2 ; 1]$, et négatif sur $]-\infty ; -2] \cup [1 ; +\infty[$.

C Activités

Activité 1 Zooms autour d'un point

Des fichiers logiciels sont disponibles dans le manuel numérique enseignant, le manuel numérique élève et sur le site enseignant indice.editions-bordas.fr.

1. a. Autour du point A, la courbe semble prendre l'allure d'une droite.

b. D'autres zooms autour du point A confirment la réponse précédente.

c. $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1{,}001^2 - 1^2}{1{,}001 - 1} = 2{,}001.$

2. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A semble être égal à 2.
Ce coefficient directeur est très proche de celui de la droite (AB).

Activité 2 Chute libre d'une balle de tennis

1. a. Au bout de 0,46 seconde, la balle a parcouru 1,019 mètre.
Au bout de 0,54 seconde, la balle a parcouru 1,4 mètre.
La vitesse moyenne de la balle entre 0,46 s et 0,54 s est :
$\frac{1{,}4-1{,}019}{0{,}54-0{,}46} = \frac{0{,}381}{0{,}08}$, soit 4,7625 m/s.

b. La vitesse moyenne de la balle entre 0,48 s et 0,52 s est :
$\frac{1{,}298-1{,}106}{0{,}52-0{,}48} = \frac{0{,}192}{0{,}04}$, soit 4,8 m/s.

2. Lorsque $h = 0{,}1$, la vitesse moyenne est égale à :
$4{,}9 \times 0{,}1 + 4{,}9 = 5{,}39$ m/s.

Lorsque $h = 0{,}01$, la vitesse moyenne est égale à :
$4{,}9 \times 0{,}01 + 4{,}9 = 4{,}919$ m/s.

Lorsque $h = 0{,}001$, la vitesse moyenne est égale à :
$4{,}9 \times 0{,}01 + 4{,}9 = 4{,}9049$ m/s.

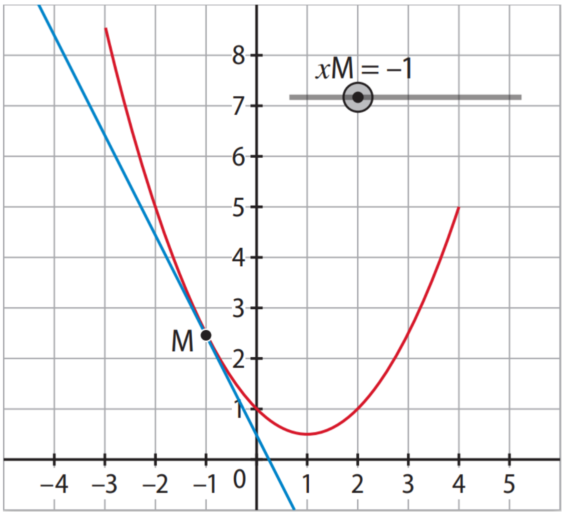
Activité 3 Signe des nombres dérivés

Des fichiers logiciels sont disponibles dans le manuel numérique enseignant, le manuel numérique élève et sur le site enseignant indice.editions-bordas.fr.

1. a. Par lecture graphique : f est décroissante sur [−3 ; 1] et croissante sur [1 ; 4].

b. Par lecture graphique : $f'(-2) = -3$.

2. a. et **b.**



Abscisse de M	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Coefficient directeur de la tangente en M	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3

c. Il semble que $f'(x) > 0$ quand x est strictement supérieur à 1, et que $f'(x) < 0$ quand x est strictement inférieur à 1.

d. Conjecture : quand f est décroissante, $f'(x) < 0$, et quand f est croissante, $f'(x) > 0$.

3. a. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$, $f'(x) = x - 1$.
Donc, $f'(x) < 0$ quand x est inférieur à 1, et $f'(x) > 0$ quand x est supérieur à 1.

b. Ce résultat est cohérent avec la conjecture émise.

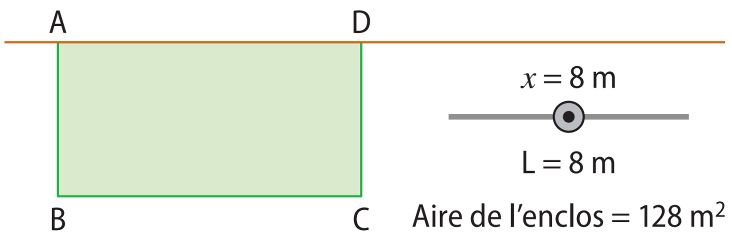
Activité 4 Un grand enclos

Des fichiers logiciels sont disponibles dans le manuel numérique enseignant, le manuel numérique élève et sur le site enseignant indice.editions-bordas.fr.

1. a. $L + 2x = 32$ donc $L = 32 - 2x$.

b. L'aire de l'enclos est égale à $L \times x$, soit $(32 - 2x) \times x$.
On a bien $f(x) = 32x - 2x^2$.

2. L'aire de l'enclos semble maximale pour $x = 8$.



3. a. $f'(x) = 32 - 4x$.

b.

x	0		8		16
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	0	↗	128	↘	0

c. L'aire de l'enclos est maximale pour $x = 8$.
Cette aire maximale est égale à 128 m².

D Exercices

Pour démarrer

1 **1.** Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4 est égal à $f'(4)$, c'est-à-dire à 8.

2. $f'(10)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 10, c'est-à-dire à 5.

2 **1.** Vrai, car l'ordonnée de A est égale à 30.

2. Faux. Le coefficient directeur de T est égal à 10.

3. Vrai, car $f'(2)$ est égal au coefficient directeur de T, c'est-à-dire à 10.

3 **1. a.** C'est le point A. **b.** C'est la droite T.

2. a. Le point A(1 ; 1) et le point M de coordonnées (0 ; −1) appartiennent à T.

b. Graphiquement, pour passer du point M au point A, on se déplace de 1 unité vers la droite et on monte de 2 unités. Le coefficient directeur de T est donc égal à 2.

On peut également vérifier ce résultat par le calcul, en utilisant les coordonnées des points A et M : $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{-1-1}{0-1} = 2$.

c. On en déduit que $f'(1) = 2$.

4 **1.** T est tangente à la courbe au point A d'abscisse 2.

2. a. Graphiquement, pour passer du point A au point B, on se déplace de 1 unité vers la droite et on monte de 3 unités.

Le coefficient directeur de T est donc égal à 3. On peut également vérifier ce résultat par le calcul, en utilisant les coordonnées des points A et B : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-2}{3-2} = 3$.

b. On en déduit que $f'(2) = 3$.

5 **1.** Pour tout réel x, $f'(x) = 0$; $g'(x) = 1$; $h'(x) = 2x$; $k'(x) = 3x^2$.
2. a. Vrai.
b. Faux, car $g'(4) = 1$.
c. Faux, car $h'(2) = 2 \times 2 = 4$ et $h'(-2) = 2 \times (-2) = -4$.
d. Vrai, car $k'(-1) = 3 \times (-1)^2 = 3$.

6 **1.** Pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.
2. $f'(3) = 2 \times 3 = 6$.

7 **1.** $p(x)$ peut s'écrire sous la forme $3h(x)$ avec $h(x) = x^2$.
Donc $p'(x) = 3 \times h'(x) = 3 \times 2x = 6x$.
2. $s(x)$ peut s'écrire sous la forme $k(x) + h(x)$ avec $k(x) = x^3$ et $h(x) = x^2$.
Donc $s'(x) = k'(x) + h'(x) = 3x^2 + 2x$.

8 $f'(x) = 3x^2$: réponse **b.**
$g'(x) = 2x + 3$: réponse **a.**
$h'(x) = 2x$: réponse **c.**

9 Il s'agit des fonctions f et h.

10 Il s'agit de la fonction g (réponse **b.**)

11 $f'(x) = 0$ $g'(x) = 3$ $h'(x) = 3$

12 $f'(x) = -2$ $g'(x) = 0$ $h'(x) = -2$

13 $f'(x) = 2x + 1$ $g'(x) = 3x^2 - 1$ $h'(x) = 3x^2 + 2x$

14 $f'(x) = 2x$ $g'(x) = 3x^2$ $h'(x) = 3x^2$

15 $f'(x) = 4x$ $g'(x) = 6x$ $h'(x) = -8x$

16 $f'(x) = 6x^2$ $g'(x) = 9x^2$ $h'(x) = -12x^2$

17 **1.** Pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 10]$, $f'(t) = 20 - 2t$.
2. $f'(5) = 20 - 2 \times 5 = 10$.
Le débit d'eau à l'instant $t = 5$ minutes est de 10 litres par minute.

18 **1.** Pour tout réel x, $f'(x) = 5 \times 2x + 3 \times 1 + 0 = 10x + 3$.
2. $f'(2) = 23$; le coefficient directeur de T est donc 23.

19 La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

20 Sur $]-\infty ; 15]$, f est décroissante car sur cet intervalle $f'(x) \leqslant 0$.
Sur $[15 ; +\infty[$, f est croissante car sur cet intervalle $f'(x) \geqslant 0$.

21 Sur $[0 ; 2]$, f est croissante ; sur $[2 ; 5]$, f est décroissante et sur $[5 ; 9]$, f est croissante.

22 Sur $[1 ; 3]$, $f'(x)$ est positif car sur cet intervalle, la fonction f est croissante.
Sur $[3 ; 7]$, $f'(x)$ est négatif car sur cet intervalle, la fonction f est décroissante.

23 **1.** Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 3 \geqslant 3$, ce qui prouve que $f'(x)$ est positif.
2. La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

24 **1.** Pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$, $2x \geqslant 0$ donc $2x + 5 \geqslant 5$, ce qui prouve que $f'(x)$ est positif.
2. La fonction f est donc croissante sur $[0 ; +\infty[$.

25 **1.** Pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 3]$, $f'(x) = 2x - 4 \times 1 + 0 = 2x - 4$.

2.

x	0		2		3
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	1	↘		↗	–2
			–3		

3. Le minimum de f sur $[0\ ;\ 3]$ est –3. Il est atteint en $x = 2$.

26 **1.** Pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 6]$, $f'(x) = -2x + 8 \times 1 + 0 = -2x + 8$.

2.

x	0		4		6
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$		↗	17	↘	
	1				13

3. Le maximum de f sur $[0\ ;\ 6]$ est 17. Il est atteint en $x = 4$.

27 **1. a.** Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f'(x) = 3x^2 + 3 \times 2x + 0 = 3x^2 + 6x$.

b. $3x(x + 2) = 3x^2 + 6x = f'(x)$.

c.

x	–3		–2		0		2
$3x$		–		–	0	+	
$x + 2$		–	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	–	0	+	

2. a. $f(-3) = -27 + 27 + 5 = 5$

$f(-2) = -8 + 12 + 5 = 9$

$f(0) = 5$

$f(2) = 8 + 12 + 5 = 25$

b.

x	–3		–2		0		2
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$		↗	9	↘		↗	25
	5				5		

Pour s'entraîner

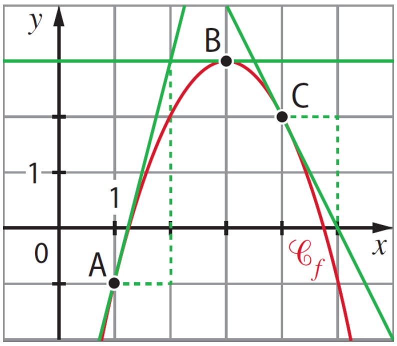
28 $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente T_1. Donc $f'(2) = 2$.
$f'(8)$ est le coefficient directeur de la tangente T_2. Donc $f'(8) = -1$.

29 $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente T_B. Donc $f'(-1) = -4$.
$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A. Donc $f'(1) = 1$.
$f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente T_C. Donc $f'(3) = 0$.

30 • $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente T_1.
Comme T_1 passe par les points A(−1 ; 1) et M(1 ; −2), son coefficient directeur est égal à :
$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{-2-1}{1-(-1)} = -1{,}5$. Donc $f'(-1) = -1{,}5$.

• $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T_2.
Donc $f'(1) = 4{,}5$ car $\frac{y_B - y_N}{x_B - x_N} = \frac{2-(-2{,}5)}{1-0} = 4{,}5$.

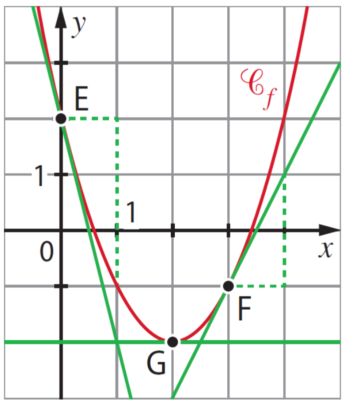
31 • La tangente à la courbe au point A d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $f'(1)$, c'est-à-dire 4. En partant de A, on se déplace de 1 unité vers la droite et on monte de 4 unités.



• La tangente à la courbe au point B d'abscisse 3 a pour coefficient directeur $f'(3)$, c'est-à-dire 0. Elle est donc parallèle à l'axe des abscisses.

• La tangente à la courbe au point C d'abscisse 4 a pour coefficient directeur $f'(4)$, c'est-à-dire −2. En partant de C, on se déplace de 1 unité vers la droite et on descend de 2 unités.

32 **a.** La tangente à la courbe au point E d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $f'(0)$, c'est-à-dire −4. En partant de E, on se déplace de 1 unité vers la droite et on descend de 4 unités.



b. La tangente à la courbe au point G d'abscisse 2 a pour coefficient directeur $f'(2)$, c'est-à-dire 0. Elle est donc parallèle à l'axe des abscisses.

c. La tangente à la courbe au point F d'abscisse 3 a pour coefficient directeur $f'(3)$, c'est-à-dire 2. En partant de F, on se déplace de 1 unité vers la droite et on monte de 2 unités.

33 **1. a.** La tangente à la courbe $\mathscr{C}_d$ au point d'abscisse 0 passe par les points de coordonnées : (0 ; 0) et (1 ; 40).
La vitesse de la voiture (en m/s) à l'instant $t = 0$ est égale à $d'(0) = 40$.
b. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_d$ au point d'abscisse 2 passe par les points de coordonnées : (0 ; 20) et (2 ; 60).
La vitesse de la voiture (en m/s) à l'instant $t = 2$ est égale à $d'(2) = \frac{60-20}{2-0} = 20$.
c. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_d$ au point d'abscisse 3 passe par les points de coordonnées : (0 ; 45) et (3 ; 75).
La vitesse de la voiture (en m/s) à l'instant $t = 3$ est égale à $d'(3) = \frac{75-45}{3-0} = 10$.
2. Gabin est en phase de décélération.

34 Une valeur approchée du coût marginal au rang 2 est $C'(2)$.
Comme $C'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente T, le coût marginal au rang 2 est d'environ 22 milliers d'euros, car $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{104-60}{2-0} = 22$.

35 **a.** $f'(1) = \frac{125-50}{1-0} = 75$,
donc à l'instant $t = 1$, la vitesse est égale à 75 mg par heure.
b. $f'(1{,}5) = \frac{150-100}{1{,}5-0} = \frac{100}{3}$;
donc à l'instant $t = 1{,}5$, la vitesse est égale à $\frac{100}{3}$ mg/h, soit environ 33,3 mg/h à 0,1 mg/h près.

36 **a.** Pour tout réel x, $f'(x) = 1$.
$f'(-1) = 1$ et $f'(2) = 1$.
b. Pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.
$f'(-1) = -2$ et $f'(2) = 4$.
c. Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2$.
$f'(-1) = 3$ et $f'(2) = 12$.

37 **1.** Pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.
$f'(3) = 6$.
2. $f'(-0{,}5) = 2 \times (-0{,}5) = -1$.

38 **1.** Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2$.
$f'(4) = 3 \times 4^2 = 48$.
2. La pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1 est égale à :
$f'(-1) = 3 \times (-1)^2 = 3$.

39 **1. a.** Pour tout réel x, $g'(x) = 2x$.

b. $g'(-2) = 2 \times (-2) = -4$.

2. La pente de la tangente T est bien égale à -4.

40 **1.** Pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.

2. a. L'équation $2x = 2$ est équivalente à $x = 1$.

b. Soit a un réel. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est égal à $f'(a)$.

Il est égal à 2 si et seulement si $f'(a) = 2$ et donc si et seulement si $2a = 2$, soit $a = 1$.

La courbe admet une tangente dont le coefficient directeur est égal à 2 au point d'abscisse 1.

3. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est égal à -4 si et seulement si $f'(a) = -4$ et donc si et seulement si $2a = -4$, soit $a = -2$.

La courbe admet une tangente de coefficient directeur égal à -4 au point d'abscisse -2.

41 **1.** Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2$. On a $f'(-4) = 48$ et $f'(4) = 48$.

2. Les tangentes à la courbe aux points d'abscisses -4 et 4 ont le même coefficient directeur (égal à 48) : elles sont donc parallèles.

42 **1.** Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2$.

2. a. L'équation $3x^2 = 3$ est équivalente à $x^2 = 1$. Elle a donc deux solutions : -1 et 1.

b. Soit a un réel. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est égal à $f'(a)$. Il est égal à 3 si et seulement si $f'(a) = 3$ et donc si et seulement si $3a^2 = 3$.

La courbe admet donc deux tangentes de coefficient directeur égal à 3 : une au point d'abscisse -1 et une au point d'abscisse 1.

43 $f'(x) = 0{,}52$ $\quad$ $g'(x) = 71x$ $\quad$ $h'(x) = 0{,}06x^2$

44 $f'(x) = 0$ $\quad$ $g'(x) = -6{,}6x$ $\quad$ $h'(x) = \frac{1}{2}x^2$

45 $f'(x) = 22x$ $\quad$ $g'(x) = -10x$

46 $f'(x) = -6x + 2$ $\quad$ $g'(x) = 8x + 11$

47 $f'(x) = 2x - 2$ $\quad$ $g'(x) = -34x - 3$

48 $f'(x) = 3x^2 + 2x + 2$ $\quad$ $g'(x) = -3x^2 + 4x + 3$

49 $f'(x) = -6x^2 + 6x$ $\quad$ $g'(x) = 21x^2 - 22x + 1$

50 $f'(x) = 3x^2 + 10x$ $\quad$ $g'(x) = 6x^2 - 14x + 1$

51 $f'(x) = -15x^2 + 7$ $\quad$ $g'(x) = 0{,}6x^2 - 0{,}2x$

52 **1.** Pour tout réel x de [1 ; 10], $f(x) = \frac{3x^2+10x}{x} = \frac{x(3x+10)}{x} = 3x + 10$.

2. Pour tout réel x de [1 ; 10], $f'(x) = 3$.

53 En développant l'expression de f, on obtient, $f(x) = x^2 + 3x$.
Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2x + 3$.

54 **1.** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -2x + 2$.

2. $f'(-2) = -2 \times (-2) + 2 = 6$.

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \times \frac{1}{2} + 2 = 1$.

55 Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 4x - 3$.

$f'(-1) = 4 \times (-1) - 3 = -7$.

$f'(0) = -3$.

$f'(2) = 4 \times 2 - 3 = 5$.

56 Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 9x^2 + 2x$.

$f'(5) = 9 \times 5^2 + 2 \times 5 = 235$.

$f'(-1) = 9 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) = 7$.

57 **1.** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2x + 1$.

2. a. La pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse $-0{,}5$ est égale à : $f'(-0{,}5) = 0$.

b. Cette tangente est donc parallèle à l'axe des abscisses.

58 **1.** Vrai.

2. Faux. L'ordonnée de E est égale à : $f(2) = -2^3 + 2 + 1 = -5$.

3. Vrai.

59 **1.** Pour tout réel x de [0 ; 14], $f'(x) = 0{,}0018x^2 - 0{,}0298x + 0{,}1706$.

2. a. $f'(1) = 0{,}1426$.
À 1 an, Lucas grandit de 0,1426 m par an.
b. $f'(4) = 0{,}0802$.
À 4 ans, Lucas grandit de 0,0802 m par an.
c. $f'(10) = 0{,}0526$.
À 10 ans, Lucas grandit de 0,0526 m par an.

60 **1.** Quand $f'(x)$ est positif, f est croissante et quand $f'(x)$ est négatif, f est décroissante.
Par conséquent, f est croissante sur [0 ; 1], puis décroissante sur [1 ; 3], puis à nouveau croissante sur [3 ; 4].
2. C'est la courbe $\mathscr{C}_a$.

61 **1.** $f'(x)$ s'annule en 2.

2.

x	-3		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

3. f est croissante sur $[-3 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; 5]$.

62 **1.** $f'(x)$ est positif sur $[-2 ; 5]$, négatif sur $[5 ; 7]$, puis positif sur $[7 ; 8]$.

2. Quand $f'(x)$ est positif, f est croissante et quand $f'(x)$ est négatif, f est décroissante.
Par conséquent, f est croissante sur $[-2 ; 5]$, décroissante sur $[5 ; 7]$, puis croissante sur $[7 ; 8]$.

63 **1.** f est croissante sur $[-3 ; -2]$, décroissante sur $[-2 ; 2]$, puis croissante sur $[2 ; 4]$.

2. Quand f est croissante, $f'(x)$ est positif, et quand f est décroissante, $f'(x)$ est négatif.
Par conséquent, $f'(x)$ est positif sur $[-3 ; -2]$, négatif sur $[-2 ; 2]$, puis positif sur $[2 ; 4]$.

64 **1.** et **2.**

x	-1		0		1		2
Variations de f	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	6
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. En utilisant le tableau ci-dessus :

a. $f'(-0{,}5)$ est positif car $-0{,}5$ appartient à $[-1 ; 0]$ et sur cet intervalle, $f'(x)$ est positif.

b. $f'(0{,}7)$ est négatif car $0{,}7$ appartient à $[0 ; 1]$ et sur cet intervalle, $f'(x)$ est négatif.

c. $f'(1{,}4)$ est positif car $1{,}4$ appartient à $[1 ; 2]$ et sur cet intervalle, $f'(x)$ est positif.

65 **a.** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2x + 6$.

$2x + 6 \geqslant 0$ équivaut à $2x \geqslant -6$ donc à $x \geqslant -3$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty ; -3]$ et croissante sur $[-3 ; +\infty[$.

b. Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -8x + 1$.

$-8x + 1 \geqslant 0$ équivaut à $-8x \geqslant -1$ donc à $x \leqslant \frac{1}{8}$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction f est donc croissante sur $]-\infty ; \frac{1}{8}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{8} ; +\infty[$.

66 **a.** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 100x - 40$.

$100x - 40 \geqslant 0$ équivaut à $100x \geqslant 40$ donc à $x \geqslant 0{,}4$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0,4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty ; 0{,}4]$ et croissante sur $[0{,}4 ; +\infty[$.

b. Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -4x - 1$.

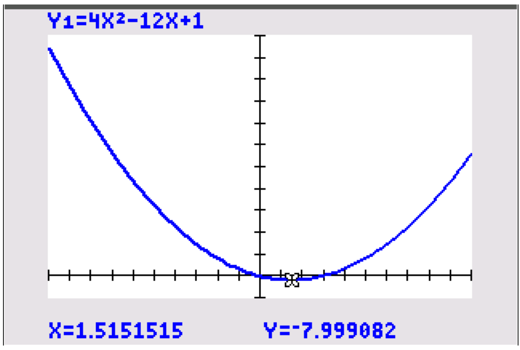
$-4x - 1 \geqslant 0$ équivaut à $-4x \geqslant 1$ donc à $x \leqslant -\frac{1}{4}$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction f est donc croissante sur $]-\infty ; -\frac{1}{4}]$ et décroissante sur $[-\frac{1}{4} ; +\infty[$.

67 **1.** La fonction f semble décroissante sur $[-10 ; 1{,}5]$ et croissante sur $[1{,}5 ; 10]$.



2. a. Pour tout réel x de l'intervalle $[-10 ; 10]$, $f'(x) = 8x - 12$.

b. $8x - 12 \geqslant 0$ équivaut à $8x \geqslant 12$ donc à $x \geqslant \frac{12}{8}$, soit à $x \geqslant \frac{3}{2}$.

Sur $[\frac{3}{2} ; 10]$, $f'(x) \geqslant 0$ et sur $[-10 ; \frac{3}{2}]$, $f'(x) \leqslant 0$.

x	-10		$\frac{3}{2}$		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

c. Sur $[-10 ; \frac{3}{2}]$, $f'(x) \leqslant 0$ donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.

Et sur $[\frac{3}{2} ; 10]$, $f'(x) \geqslant 0$ donc la fonction f est croissante sur cet intervalle.

La conjecture faite dans la question **1.** est vérifiée.

68 **1.** Pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 10], $f'(x) = 0,22x - 0,66$.

2. $0,22x - 0,66 \geqslant 0$ équivaut à $0,22x \geqslant 0,66$ donc à $x \geqslant 3$.

Sur [3 ; 10], $f'(x) \geqslant 0$ et sur [0 ; 3], $f'(x) \leqslant 0$.

x	0		3		10
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	1,86	$\searrow$	0,87	$\nearrow$	6,26

3. Le minimum de f sur [0 ; 10] est 0,87. Il est atteint pour $x = 3$.

Le maximum de f sur [0 ; 10] est 6,26. Il est atteint pour $x = 10$.

69 **1.** Pour tout réel x, $f'(x) = -0,1x + 0,84$.

2. $-0,1x + 0,84 \geqslant 0$ équivaut à $-0,1x \geqslant -0,84$ donc à $x \leqslant 8,4$.

Sur [0 ; 8,4], $f'(x) \geqslant 0$ et sur [8,4 ; 10], $f'(x) \leqslant 0$.

x	0		8,4		10
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	2,04	$\nearrow$	5,568	$\searrow$	5,44

3. Le minimum de f sur [0 ; 10] est 2,04. Il est atteint pour $x = 0$.

Le maximum de f sur [0 ; 10] est 5,568. Il est atteint pour $x = 8,4$.

70 **1.** Pour tout réel x, $f'(x) = 2x + 6$.

2. $2x + 6 \geqslant 0$ équivaut à $2x \geqslant -6$ donc à $x \geqslant -3$.

Sur $[-3 ; +\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ et sur $]-\infty ; -3]$, $f'(x) \leqslant 0$.

3.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	-19	$\nearrow$	

4. La fonction f admet un minimum égal à -19. Il est atteint pour $x = -3$.

71 **1.** Pour tout réel x, $f'(x) = -4x + 8$.

2. $-4x + 8 \geqslant 0$ équivaut à $-4x \geqslant -8$ donc à $x \leqslant 2$.

Sur $]-\infty\ ;\ 2]$, $f'(x) \geqslant 0$ et sur $[2\ ;\ +\infty[$, $f'(x) \leqslant 0$.

3.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$		↗	9	↘	

4. La fonction f admet un maximum égal à 9. Il est atteint pour $x = 2$.

72 **1.** Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\ ;\ 20]$, $f'(t) = -t + 10$.

2. $-t + 10 \geqslant 0$ équivaut à $-t \geqslant -10$ donc à $t \leqslant 10$.

Sur $[0\ ;\ 10]$, $f'(t) \geqslant 0$ et sur $[10\ ;\ 20]$, $f'(t) \leqslant 0$.

t	0		10		20
$f'(t)$		+	0	–	
$f(t)$	8	↗	58	↘	8

3. a. La fonction f admet un maximum pour $t = 10$.
L'artificier doit donc programmer un temps de vol avant l'explosion de 10 dixièmes de seconde.

b. $f(10) = 58$; la hauteur des fusées sera de 58 mètres.

73 **1.** Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[14\ ;\ 23]$, $f'(t) = -4t + 74$.

2.

t	14		18,5		23
$f'(t)$		+	0	–	
$f(t)$	44	↗	84,5	↘	44

3. Le responsable a tort.

Le maximum de f sur $[14\ ;\ 23]$ est égal à 84,5. Il est atteint pour $t = 18,5$.

On en déduit qu'à 18 h 30 min, il y aura plus de 80 véhicules au péage.

74 **1.** Pour tout nombre réel x de $[-2\ ;\ 2]$, $f'(x) = 6x^2 + 7x - 3$.

2. $(2x + 3)(3x - 1) = 6x^2 - 2x + 9x - 3$
$= 6x^2 + 7x - 3$
$= f'(x)$.

3.

x	-2		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{3}$		2
$2x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4.

x	-2		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{3}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	↗	$6{,}625$	↘	$\frac{25}{54}$	↗	25

75 **1.** Pour tout réel x, $k'(x) = -6x^2 - 4x + 10$.

2. $(2 - 2x)(5 + 3x) = 10 - 10x + 6x - 6x^2$
$= -6x^2 - 4x + 10$
$= k'(x)$

3.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
$5 + 3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2 - 2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La fonction k est décroissante sur $]-\infty\ ;\ -\frac{5}{3}]$ et sur $[1\ ;\ +\infty[$; et croissante sur $[-\frac{5}{3}\ ;\ 1]$.

76 **1.** Pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 50]$, $f'(x) = 0{,}3x^2 - 9{,}6x + 18$.

2. $(0{,}3x - 9)(x - 2) = 0{,}3x^2 - 9x - 0{,}6x + 18$
$= 0{,}3x^2 - 9{,}6x + 18$
$= f'(x)$.

3.

x	0		2		30		50
$0,3x - 9$		–		–	0	+	
$x - 2$		–	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	–	0	+	

4.

x	0		2		30		50
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$			17,6				1 400
	0	↗		↘	–1 080	↗	

77 **1.** Pour tout réel x, $f'(x) = 9x^2 - 9$.

2. $f'(x) = 9(x^2 - 1) = 9(x - 1)(x + 1)$.

3. a.

x	–2		–1		1		2
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$			7				7
	–5	↗		↘	–5	↗	

b.

x	0		1		2
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	1				7
		↘	–5	↗	

78 **1.** Par lecture graphique, f est décroissante sur [0 ; 1,5] et croissante sur [1,5 ; 2].
Le minimum de f est égal à environ 1,8.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 2], $f'(x) = 15x^2 - 24x = 3x(5x - 8)$.

3. a.

x	0		1,6		2
$3x$	0	+		+	
$5x - 8$		–	0	+	
$f'(x)$	0	–	0	+	

b.

x	0		1,6		2
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	12				4
		↘	1,76	↗	

c. Le minimum de f sur [0 ; 2] est 1,76. Il est atteint en $x = 1,6$.

79 **1.**

x	$-\infty$		2,6		5,1		$+\infty$
−12		−		−		−	
10x − 51		−		−	0	+	
5x − 13		−	0	+		+	
***f*’(*x*)**		−	0	+	0	−	

2.

x	$-\infty$		2,6		5,1		$+\infty$
***f*’(*x*)**		−	0	+	0	−	
***f*(*x*)**		$\searrow$	−7 085,2	$\nearrow$	−5 522,7	$\searrow$	

80 **1.** Pour tout réel x de l’intervalle [0 ; 10], $f'(x) = 1{,}5x^2 - 18x + 48$.

et $(1{,}5x - 6)(x - 8) = 1{,}5x^2 - 6x - 12x + 48$

$= 1{,}5x^2 - 18x + 48$

$= f'(x)$

2.

x	0		4		8		10
1,5x − 6		−	0	+		+	
x − 8		−		−	0	+	
***f*’(*x*)**		+	0	−	0	+	
***f*(*x*)**	−25	$\nearrow$	55	$\searrow$	39	$\nearrow$	55

3. Le minimum de f sur [0 ; 10] est −25. Il est atteint en $x = 0$.
Le maximum de f sur [0 ; 10] est 55. Il est atteint en $x = 4$ et en $x = 10$.

81 **1.** Pour tout nombre réel x de l’intervalle [0 ; 4], $g'(x) = -6x^2 - 6x + 12$.

$(2 - 2x)(3x + 6) = 6x + 12 - 6x^2 - 12x$

$= -6x^2 - 6x + 12$

$= g'(x)$.

2. a. Pour tout nombre réel x de l’intervalle [0 ; 4], $x \geqslant 0$ donc $3x \geqslant 0$.

Par conséquent, $3x + 6 \geqslant 6$. On en déduit que $3x + 6$ est positif.

b. $2 - 2x \geqslant 0$ équivaut à $-2x \geqslant -2$ donc à $x \leqslant 1$.

Sur $[0 ; 1]$, $2 - 2x \geqslant 0$ et sur $[1 ; 4]$, $2 - 2x \leqslant 0$.

x	0		1		4
$2 - 2x$		+	0	–	
$3x + 6$		+		+	
$g'(x)$		+	0	–	
$g(x)$	20	↗	27	↘	–108

3. La fonction g admet un minimum en $x = 4$. Ce minimum est égal à -108.
La fonction g admet un maximum en $x = 1$. Ce maximum est égal à 27.

82 **1.** Pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 45]$, $b'(x) = -3x^2 + 120x - 525$.

2. $(-3x + 15)(x - 35) = -3x^2 + 15x + 105x - 525$
$= -3x^2 + 120x - 525$
$= b'(x)$.

3.

x	0		5		35		45
$-3x + 15$		+	0	–		–	
$x - 35$		–		–	0	+	
$b'(x)$		–	0	+	0	–	
$b(x)$	0	↘	–1 250	↗	12 250	↘	6 750

4. Le bénéfice est maximal lorsque le producteur vend 35 kg de truffes. Ce bénéfice maximal est de 12 250 euros.

83 **1. a.** $2x + 2y = 32$ donc $x + y = 16$.

Par conséquent, $y = 16 - x$.

b. $2y + h = 32$ donc $h = 32 - 2y$.

Or $2y = 32 - 2x$ donc $h = 32 - (32 - 2x) = 2x$.

c. Le volume de la boîte en cm^3 est donné par le produit :

$x \times y \times h = x(16 - x) \times 2x$
$= 2x^2(16 - x)$
$= 32x^2 - 2x^3$
$= V(x)$

2. Pour tout réel x appartenant à $[0 ; 16]$, $V'(x) = 64x - 6x^2 = 2x(32 - 3x)$.

3. a. et **b.**

x	0		$\frac{32}{3}$		16
$2x$	0	+		+	
$32 - 3x$		+	0	−	
$V'(x)$	0	+	0	−	
$V(x)$	0	↗	$\frac{32\,768}{27}$	↘	0

4. Le volume de la boîte est maximal pour $x = \frac{32}{3}$ cm.

On a alors, $y = \frac{16}{3}$ et $h = \frac{64}{3}$. Au centième près, $x \approx 10{,}67$ cm, $y \approx 5{,}33$ cm et $h \approx 21{,}33$ cm.

84 **1.** Pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 12,5], $f'(t) = 0{,}42t^2 - 6{,}3t + 18{,}48$.

$(0{,}42t - 1{,}68)(t - 11) = 0{,}42t^2 - 1{,}68t - 4{,}62t + 18{,}48$

$= 0{,}42t^2 - 6{,}3t + 18{,}48$

$= f'(t)$

2.

t	0		4		11		12,5
$0{,}42t - 1{,}68$		−	0	+		+	
$t - 11$		−		−	0	+	
$f'(t)$		+	0	−	0	+	
$f(t)$	18,75	↗	51,23	↘	27,22	↗	31

3. Il faut prévoir 4 minutes pour la première étape, 7 minutes pour la seconde et 1,5 minute pour la troisième.

Pour faire le point

85 **1.** D ; **2.** A ; **3.** A.

86 **1.** Vrai.
2. Vrai.
3. Faux.

87 **1.** Faux.
2. Vrai.
3. Vrai.

88 **1.** B et C
2. A
3. A

89 **1.** Vrai.
2. Faux.
3. Vrai.
4. Vrai.

Automatismes

90 **1.** La durée de l'entraînement a été de 100 minutes, soit 1 heure et 40 minutes.

2. Au bout de 20 minutes, Jérôme a parcouru 10 km.

3. Jérôme a parcouru les 30 premiers kilomètres en 50 minutes.

4. plat – descente – plat – montée

5. La distance totale est de 45 km.

Jérôme a parcouru plus de la moitié de la distance totale, c'est-à-dire plus de 22,5 km, au bout de 35 mn, et donc à partir de 8 h 35 min.

91 **1.** $A = 0{,}6$; $B = 0{,}35$ et $C = 9{,}5$.

2. $A = \frac{3}{50}$; $B = \frac{2}{5}$ et $C = \frac{7}{2}$.

3. $A = 50$ % ; $B = 36$ % et $C = 200$ %.

92 **a.** $5{,}5 - 0{,}75 = 4{,}75$.

b. $0{,}25 \times 20 = 5$.

c. $412 \times 0{,}1 = 41{,}2$.

d. $124 \times 0{,}02 = 2{,}48$.

93 Réponse **b.**

94 Alcoolémie $= \frac{300 \times 12 \times 0{,}8}{100 \times 55 \times 0{,}6} \approx 0{,}87$.

Emma ne pourra pas prendre le volant juste après le repas.

95 **a.** Solution : 4.

b. Solution : 6.

c. Solution : 2,5.

96 **a.** Solution : 2,5.

b. Solution : 6.

c. Solution : 20.

d. Solution : 20.

97 **1.** Vrai. **b.** Faux. La solution est 4. **c.** Vrai.

98 **1.** Les nombres qui ont pour carré $\frac{1}{4}$ sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

2. Solutions : -9 et 9.

3. Il n'y a pas de solution.

Pour aller plus loin

99. **1. a.** $N(12) = -8 \times 12 + 146 = 50$.
Pour un prix de 12 €, il y a 50 clients.
b. La recette est alors égale à : $12 \times 50 = 600$ €.

2. La recette est le produit du nombre de clients par le prix du plat du jour.
Donc $f(x) = xN(x) = x(-8x + 146)$.

3. a. $f(x) = -8x^2 + 146x$ donc $f'(x) = -16x + 146$.
b.

x	6		9,125		16
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	588	↗	666,125	↘	288

c. La recette est maximale pour un prix du plat du jour de 9,1 € au dixième d'euro près.
d. La recette maximale est alors de 666,12 €.

100 **1.** Pour tout réel x de $[0 ; 60]$, $f'(x) = 0{,}001x^2 - 0{,}06x + 0{,}5$.

2. Pour tout réel x de $[0 ; 60]$,
$$\begin{aligned} 0{,}001(x-10)(x-50) &= 0{,}001(x^2 - 60x + 500) \\ &= 0{,}001x^2 - 0{,}06x + 0{,}5 \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

3. $f'(0) = 0{,}5$ et $f'(60) = 0{,}5$: les pentes des tangentes à la courbe aux points A et B sont identiques.

4. a.

x	0		10		50		60
$x - 10$		–	0	+		+	
$x - 50$		–		–	0	+	
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	15	↗	$\frac{52}{3}$	↘	$\frac{20}{3}$	↗	9

b. L'ordonnée du point le plus haut est égale à $\frac{52}{3}$, soit environ 17,33 m.
Celle du point le plus bas est égale à $\frac{20}{3}$, soit environ 6,67 m.
La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas est égale à $\frac{32}{3}$, soit environ 10,67 m : elle est supérieure à 10 mètres.
La contrainte mécanique n'est pas respectée.

101 *Des fichiers logiciels sont disponibles dans le manuel numérique enseignant, le manuel numérique élève et sur le site enseignant indice.editions-bordas.fr.*

1.

En **B2** : =4*A2^2+4*A2+574

En **C2** : =A2*130

En **D2** : =C2-B2

2.

	A	B	C	D
1	Nombre de pneus (en milliers)	Charges de production (en milliers d'euros)	Recette (en milliers d'euros)	Bénéfice (en milliers d'euros)
2	0	574	0	-574
3	1	582	130	-452
4	2	598	260	-338
5	3	622	390	-232
6	4	654	520	-134
7	5	694	650	-44
8	6	742	780	38
9	7	798	910	112
10	8	862	1040	178
11	9	934	1170	236
12	10	1014	1300	286
13	11	1102	1430	328
14	12	1198	1560	362
15	13	1302	1690	388
16	14	1414	1820	406
17	15	1534	1950	416
18	16	1662	2080	418
19	17	1798	2210	412
20	18	1942	2340	398
21	19	2094	2470	376
22	20	2254	2600	346
23	21	2422	2730	308
24	22	2598	2860	262
25	23	2782	2990	208
26	24	2974	3120	146
27	25	3174	3250	76
28	26	3382	3380	-2
29	27	3598	3510	-88
30	28	3822	3640	-182
31	29	4054	3770	-284
32	30	4294	3900	-394

a. Les charges de production pour 12 000 pneus sont de 1 198 000 €.

b. Non, le bénéfice est négatif (perte de 134 000 €).

c. Pour réaliser le plus grand bénéfice, l'entreprise doit vendre 16 000 pneus.

Le bénéfice est alors de 418 000 €.

3. a. Pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 30], $B(x) = 130x - (4x^2 + 4x + 574)$
$= -4x^2 + 126x - 574$.

b. Pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 30], $B'(x) = -8x + 126$.

$-8x + 126 \geqslant 0$ équivaut à $-8x \geqslant -126$

donc à $x \leqslant 15{,}75$.

Sur [0 ; 15,75], $B'(x) \geqslant 0$ et sur [15,75 ; 30], $B'(x) \leqslant 0$.

x	0		15,75		30
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$	−574	↗	418,25	↘	−394

c. Le bénéfice maximal est de 418 250 € ; il est atteint pour 15 750 pneus produits et vendus.

102 **1.** Le volume du rangement (en dm^3) correspond au volume du pavé droit, soit :
$f(x) = x(12 - x)(12 - x)$
$= x(144 + x^2 - 24x)$
$= x^3 - 24x^2 + 144x$.

2. Pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 12], $f'(x) = 3x^2 - 48x + 144$.
$(3x - 12)(x - 12) = 3x^2 - 12x - 36x + 144$
$= 3x^2 - 48x + 144$
$= f'(x)$

3.

x	0		4		12
$3x - 12$		−	0	+	
$x - 12$		−		−	0
$f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$	0	↗	256	↘	0

4. Le volume du rangement est maximal pour $x = 4$. Il est alors de 256 dm^3.

103 *Des fichiers logiciels sont disponibles dans le manuel numérique enseignant, le manuel numérique élève et sur le site enseignant indice.editions-bordas.fr.*

1.a. Pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 12], $f'(t) = -3t^2 + 18t + 21$.

$(t + 1)(-3t + 21) = -3t^2 + 21t - 3t + 21$
$= -3t^2 + 18t + 21$
$= f'(t)$

b.

t	0		7		12
$t+1$		+		+	
$-3t+21$		+	0	−	
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	190	↗	435	↘	10

c. Le maximum de f sur [0 ; 12] est égal à 435. Il est atteint en $t = 7$.

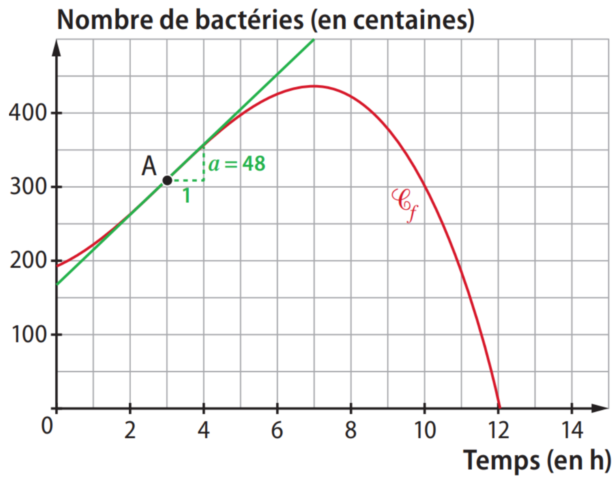
Le nombre de bactéries est maximal à l'instant $t = 7$ heures. Il y a alors 43 500 bactéries.

2. $f'(10) = -3 \times 10^2 + 18 \times 10 + 21 = -99$.

La vitesse instantanée de croissance à l'instant $t = 10$ est égale à –99 centaines de bactéries par heure.

Ainsi, à l'instant $t = 10$, le nombre de bactéries diminue de 9 900 par heure.

3. a.



b. Pour t allant de 0 à 3, les coefficients directeurs des tangentes à la courbe augmentent (de $f'(0) = 21$ à $f'(3) = 48$) : la croissance est de plus en plus rapide.

Pour t allant de 3 à 7, les coefficients directeurs des tangentes à la courbe diminuent (de $f'(3) = 48$ à $f'(7) = 0$) : la croissance est de moins en moins rapide.

c. Entre 7 h et 12 h, le nombre de bactéries diminue de plus en plus rapidement car, en valeur absolue, les coefficients directeurs des tangentes à la courbe sont de plus en plus grands (de $f'(7) = 0$ à $|f'(12)| = 195$).

104 **1.a.** Pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 10], $R(x) = 680x$.

b. L'entreprise réalise un bénéfice lorsqu'elle produit et vend entre 2,1 km et 8,8 km de tissu.

2. Pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 10], $B(x) = 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750)$

$$= -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750.$$

3. Pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 10], $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$.

$$\begin{aligned}-15(x-6)(3x+2) &= -15(3x^2 + 2x - 18x - 12)\\ &= -15(3x^2 - 16x - 12)\\ &= -45x^2 + 240x + 180\\ &= B'(x)\end{aligned}$$

4.

x	1		6		10
−15		−		−	
$x - 6$		−	0	+	
$3x + 2$		+		+	
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$	−465	↗	1 410	↘	−1 950

5. a. $C_m(x) = C'(x) = 45x^2 - 240x + 500$.

b. D'après la question **4.**, $x_0 = 6$.

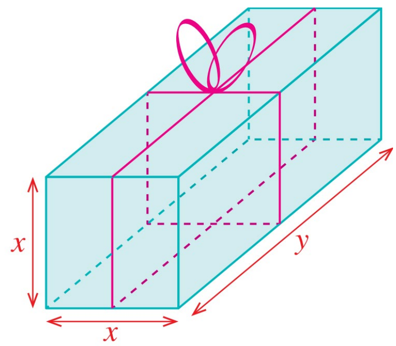
$C_m(6) = 45 \times 6^2 - 240 \times 6 + 500 = 680$.

Le coût marginal au rang 6 est égal au prix de vente d'un kilomètre de tissu.

E Exposés

Exposé 1 L'emballage des cadeaux

La longueur de ruban utilisée permet d'établir une relation entre le côté x de la base carrée et la hauteur y de la boîte.



L'élève peut ensuite donner l'expression du volume de la boîte en fonction de x.

L'étude des variations de la fonction qui donne le volume de la boîte en fonction de x permet de répondre au problème.

Exposé 2 La chute d'une bille d'acier

L'élève peut utiliser un tableur pour obtenir une courbe de tendance polynomiale.